Interpolacija

Pogosto potrebujemo vrednost neke fizikalne količine pri dani temperaturi. V tabeli, ki jo imamo na voljo je ta količina podana pri različnih temperaturah. Težava nastopi, če podatka o temperaturi, ki jo mi potrebujemo ni v tabeli.

Tedaj uporabimo t.i. *interpolacijo* po eni izmed metod, kot so linearna, polinomska ali kubični spline.

Linearna interpolacija je najenostavnejša med vsemi in deluje med dvema znanima točkama $T_1(x_1,y_1)$ in $T_2(x_2,y_2)$. 'Naš' x mora biti med $x_1$in x_2

Enačba premice skozi ti dve točki se glasi:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Primer programa v Fortranu za linearno interpolacijo:

```
program linearna

implicit none

real :: x1,y1,x2,y2,x,y,k,n

print*,'Podaj koordinate prve tocke T1(x1,y1)'

read*,x1,y1

print*,'Podaj koordinate druge tocke T2(x2,y2)'

read*,x2,y2

print*,'Podaj vrednost za x'

read*,x

k=(y2-y1)/(x2-x1)

y=y1+k*(x-x1)

n=y1-k*x1

print*,'Vrednost y =',y

print*,'Vrednost k =',k

print*,'Vrednost n =',n

end program linearna
```

V Excelu je vgrajena funkcija FORECAST(x; znani_y; znani_x), ki nam vrne vrednost y, izračunano po zgornji enačbi.

http://office.microsoft.com/en-us/excel-help/forecast-HP005209096.aspx?CTT=5&origin=HP005204211

Če je točk več kot 2, FORECAST izračuna premico z linearno regresijo.

znan x	znan y	znan x	znan y
0,1	-0,49	0,1	=A2^2+5*A2-1
0,2	0,04	0,2	=A3^2+5*A3-1
0,3	0,59	0,3	=A4^2+5*A4-1
0,4	1,16	0,4	=A5^2+5*A5-1
0,5	1,75	0,5	=A6^2+5*A6-1
0,6	2,36	0,6	=A7^2+5*A7-1
0,7	2,99	0,7	=A8^2+5*A8-1
0,8	3,64	0,8	=A9^2+5*A9-1
0,9	4,31	0,9	=A10^2+5*A10-1
1	5	1	=A11^2+5*A11-1
1,1	5,71	1,1	=A12^2+5*A12-1
1,2	6,44	1,2	=A13^2+5*A13-1
1,3	7,19	1,3	=A14^2+5*A14-1
1,4	7,96	1,4	=A15^2+5*A15-1
1,5	8,75	1,5	=A16^2+5*A16-1
1,6	9,56	1,6	=A17^2+5*A17-1
1,7	10,39	1,7	=A18^2+5*A18-1
1,8	11,24	1,8	=A19^2+5*A19-1
1,9	12,11	1,9	=A20^2+5*A20-1
2	13	2	=A21^2+5*A21-1
	2,845		=FORECAST(0,65; B2:B21;A2:A21)

Interpolacijska Lagrangova krivulja

Kadar hočemo narisati Lagrangevo krivuljo, moramo uporabiti Lagrangeve polinome. Pri risanju Lagrangeovih krivulj, gre krivulja čez n+1 točk, oziroma skozi n+1 točk položimo polinom stopnje n.

Langrangeov polinom je polinom, ki se uporablja pri interpolaciji točk s krivuljo.

Lagrangeova krivulja $P_n(x)$, ki interpolira točke (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) je

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k^n(x)$$

kjer je

$$L_k^n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Očitno je $L_k^n(x_i) = 1$ za i = k in $L_k^n(x_i) = 0$ za $i \neq j$ in $P_n(x_i) = y_i$. Polinom $L_k^n(x)$ je stopnje *n* in se imenuje *k*-ti Lagrangeov polinom. Točki P_n pa rečemo vozel.

Lagrangeovo interpolacijsko krivuljo je najprej najlažje razložiti na primeru interpolacije skozi dve točki (x_0,y_0) in (x_1,y_1). Skozi točki lahko položimo premico oziroma polinom prve stopnje.

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

To formulo imenujemo linearna interpolacija.

Torej izračunati moramo $P(x_0)$ in $P(x_1)$, da dobimo y_0 in y_1. Potem lahko čez ti dve točki (x_0,y_0) in (x_1,y_1) narišemo premico.

Skozi n+1 točk pa lahko položimo polinom n-te stopnje:

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & y_0 \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots \\ & \ldots + y_k \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} + \ldots \\ & \ldots + y_n \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

ali če ga zapišemo krajše

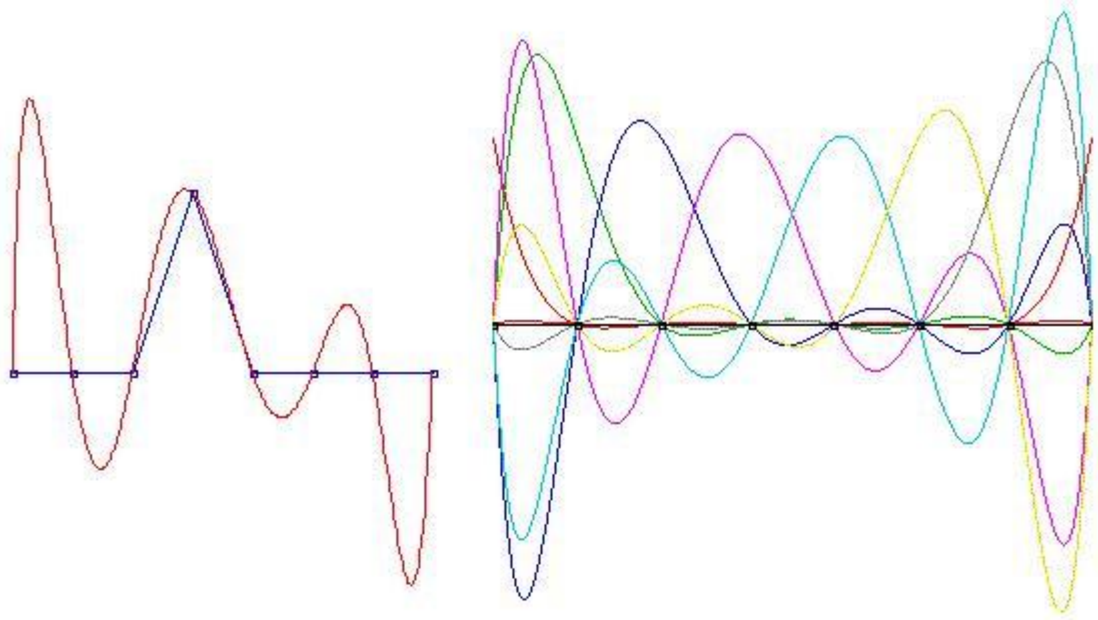
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k^n(x)$$

kjer je

$$L_k^n(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

Velja $L_k^n(x_i) = 1$ za i = k in $L_k^n(x_i) = 0$

Primer krivulje stopnje n = 7

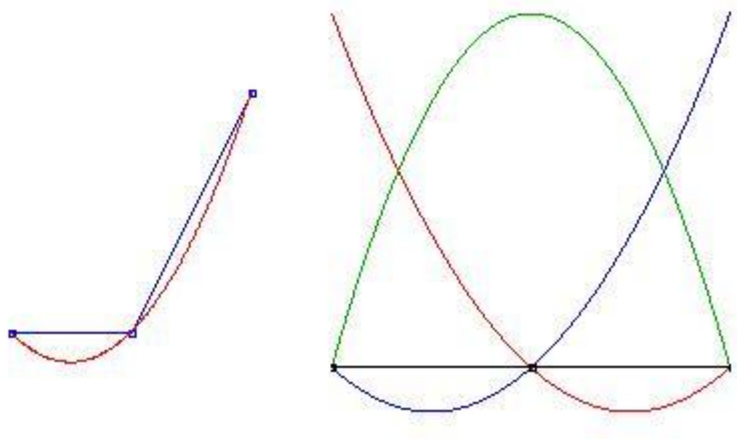


Kvadratna lagrangeova krivulja

Kvadratno Lagrangeovo krivuljo predstavlja Lagrangeov polinom stopnje n = 2, ki gre čez 3 točke. (x_k,y_k) k = 0, 1, 2

$$P_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Izračunati moramo $P(x_0)$, $P(x_1)$ in $P(x_2)$ in dobimo y_0, y_1 in y_2, potem točke med seboj povežemo in dobimo kvadratno Lagrangeovo krivuljo.



Slika predstavlja kvadratno krivuljo

Kubična Langrangeova krivulja

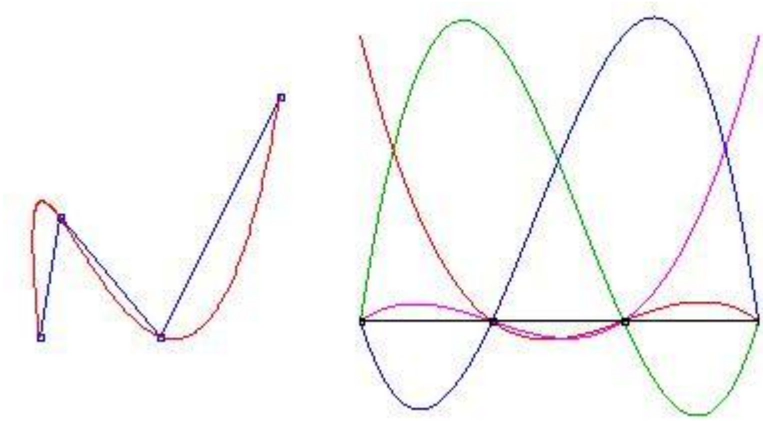
Kubična Lagrangeova krivulja predstavlja Lagrangeov polinom stopnje n = 3, ki gre čez 4 točke. (x_k,y_k) k = 0, 1, 2, 3

$$P_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Izračunati moramo torej $P_3(x_0)$, $P_3(x_1)$, $P_3(x_2)$ in $P_3(x_3)$, da dobimo y_0, y_1, y_2 in y_3.

Potem točke(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) med seboj povežemo in tako dobimo kubično Lagrangeovo krivuljo.



Slika predstavlja kubično krivuljo.

Vir: http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Lagrangeova_krivulja

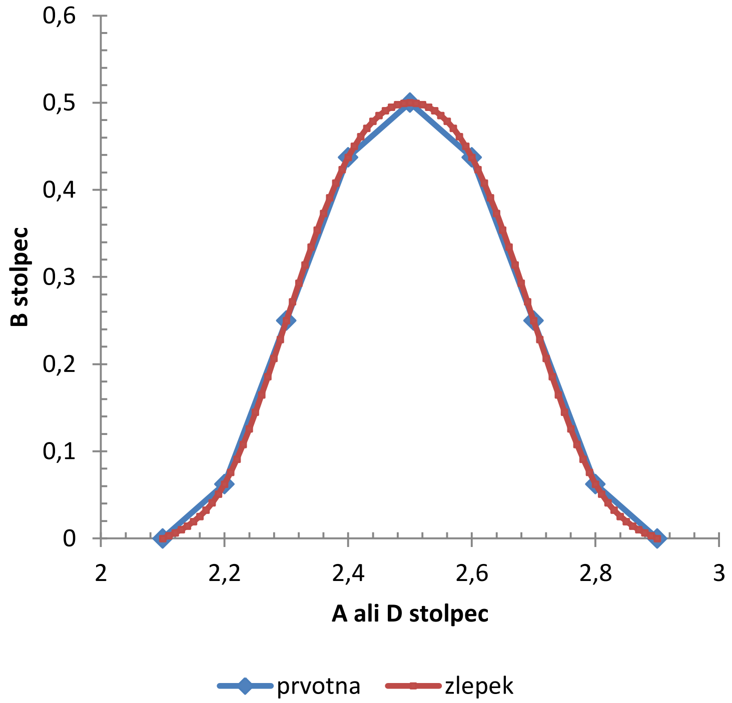
Kubični zlepek – navodilo za Excel

V preglednici so v poljih pari točk (x,y) kakor kaže slika:

	A	B	C	D - kubični zlepek	prikaz makro ukaza kubičnega zlepka
6	2,1	0	2,1	2,94949E-08	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D6)
7	2,2	0,0625	2,11	0,003124363	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D7)
8	2,3	0,25	2,12	0,006438131	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D8)
9	2,4	0,4375	2,13	0,010130768	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D9)
10	2,5	0,5	2,14	0,014391706	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D10)
11	2,6	0,4375	2,15	0,01941038	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D11)
12	2,7	0,25	2,16	0,025376222	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D12)
13	2,8	0,0625	2,17	0,032478665	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D13)
14	2,9	0	2,18	0,040907144	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D14)
			2,19	0,050851091	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D15)
86			do 2,9	2,94948E-08	=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D86)

Zlepek je ime za odsekoma preprost kubični polinom, ki ga je mogoče na večjem intervalu zlepiti skupaj v funkcijo, ki je zvezna na celotnem intervalu in gladka, kar pomeni, da je odvedljiva v vsaki točki intervala.

Preglednica vsebuje makro, ki omogoča interpolacijo med točkami z uporabo t.i. kubičnega zlepka. Podatki oziroma točke so tako daleč vsaka sebi, da je graf (A,B) precej ''oglat''.



Želimo izboljšati prvotno krivuljo z uporabo kubičnega zlepa. V ta namen si sestavimo področje x-koordinat želene gostote (stolpec C), kjer želimo izračunati funkcijske vrednosti (stolpec D).

Npr. v celico D6 vpišemo ''2,1'', v D7 ''2,12'' in tako naprej z vnaprej izbranim korakom 0,02 do vključno celice D46. V E6 pa vpišemo ''=cubic_spline($A$6:$A$14;$B$6:$B$14;D6)'' in postopek razširimo do E46. V kolikor želimo drugačen korak, moramo temu ustrezno vpisati oznake celic pri izračunu vrednosti zlepka v posamezni točki. Obe funkciji, prvotno in interpolirano, narišemo na isti graf.