UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Smer (Matematika UN-BO) - 1. stopnja

Belma Delić

POLINOMI ČETRTE STOPNJE IN ZLATI REZ

Delo seminarja 1

Mentor: prof. dr. Milan Hladnik

Ljubljana, 2011

Marsikdo je že slišal za besedno zvezo *zlati rez*, vendar pa se večina teh ne zaveda globine navedenega pojma. Ne le, da je pomemben matematični objekt, srečamo ga tudi na različnih drugih področjih kot so gradbeništvo, umetnosti, narava itd. Zlati rez stvarnosti daje privdih podobnosti, hkrati pa jo ustvarja edinstveno. Prvi, ki se je začel poglabljati v tovrsten problem, je bil eden največjih antičnih matematikov Evklid. Svoja dognanja pa je zapisal v knjigi Elementi.

1 Zlati rez

Zlati rez predstavlja razmerje, ki ga lahko ponazorimo z razdelitvijo daljice na dva neenaka dela, tako da je razmerje celotne dolžine daljice proti večjemu enako razmerju večjega proti manjšemu. Razmerje znaša $(1+\sqrt{5})/2$.

Daljico bomo razdelili na sledeč način. Razdelimo jo na dva neenaka dela. Prvi del naj bo dolžine 1, drugi del pa dolžine φ. Če uporabimo zgoraj navedeno definicijo, dobimo razmerje

$$\frac{\varphi+1}{\varphi}=\frac{\varphi}{1}. \tag{1}$$

Zgornjo enačbo preuredimo in dobimo

$$\varphi^2=\varphi+1,$$

$$\varphi^2-\varphi-1=0.$$

Kvadratni enačbi lahko s pomočjo diskriminante izračunamo ničle.
Ker je diskriminanta >0, ima naša enačba dve rešitvi. Prva rešitev je zlato število $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$, druga pa konjugirani del tega.

Z malo truda lahko iz (1) pridobimo dve enačbi

$$\varphi^2=\varphi+1 \tag{2}$$

in

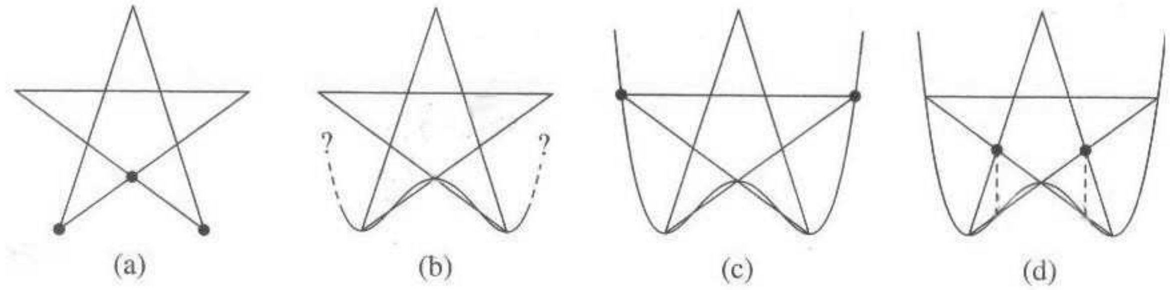
$$\varphi^{-2}=1-\varphi^{-1}. \tag{3}$$

Ti nam bosta v prihodnje prišli prav.

Bistvo zlatega reza smo že povzeli, zanima pa nas, kako je le ta povezan s polinomi četrte stopnje.

Skušali bomo poiskati povezave med njima.

Izberimo lik, katerega razmerja odsekov daljic so v zlatem rezu. Lik, ki usteza temu se imenuje *pentagram*. Sedaj, ko imamo lik, poskusimo narisati polinom četrte stopnje, katerega graf gre skozi označene tri točke (slika 1a).
Na izbiro imamo neskončno mnogo polinomov četrte stopnje , vendar pa obstaja natanko eden, ki doseže svoji najnižji vrednosti v obeh označenih točkah (slika 1b). Graf oblikovan kot gladka črka W ima lokalni maksimum v označeni točki (slika 1b).



Slika 1

Ko mislimo, da smo že pri koncu, se nam zastavijo nova vprašanja.
Kako se graf nadaljuje?
Ali se bo naš graf ponovno dotaknil pentagrama na poti v neskončnost?

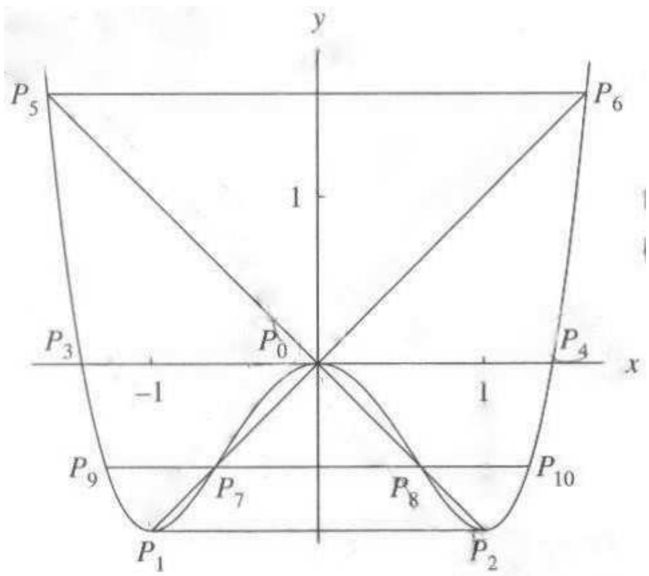
Izkaže se, da gre graf skozi predvideni točki na pentagramu (slika 1c). Poleg vseh dosedanjih točk ima graf še dve posebni, nahajata se na presečišču grafa z roboma pentagrama (slika 1d). Vidimo, da se ti dve točki nahajata točno pod drugima dvema točkama na pentagramu. Lahko rečemo, da gre za translacijo teh dveh točk na graf polinoma. Obe točki se premakneta za isto razdaljo v isti smeri.

Iz zgornjega sodeč imata naveden polinom in zlato razmerje kar nekaj skupnih zakonitosti. Prav to pa je vzrok za nadalnje poglabljanje v tovrsten problem in obarvnavanje simetričnih in splošnih polinomov s prevoji.

2 Simetrični polinomi četrte stopnje

Vzemimo si nek primer polinoma četrte stopnje, na primer $f(x) = x^4 - 2x^2$ (Slika 2). Za začetek bomo definirali točke, ki pripadajo danemu polinomu in začeli s točko $P_0(x_0, y_0)$. Značilnost točke je ta, da je $f'''(x_0) = 0$. Naslednji zanimivi točki grafa sta tisti, kjer naša funkcija doseže minimalno vrednost, poimenujmo jih P_1 in P_2. Skozi ti dve točki poteka natanko ena tangenta, ki ima dvojni dotik v tih dveh točkah. Tangenta polinoma v točki P_0 seka graf še na dveh mestih, presečišči označimo s točkama P_3 in P_4. Premica, ki vsebuje že dve označeni točki na grafu P_0 in P_2, seka naš graf še v dveh točkah, označimo jih P_5 in P_8. Podobno velja za premico ki gre skozi točki P_0 in P_1, le da ti dve novi presečišči označimo P_6 in P_7. Najbolj zanimivi točki sta P_7 in P_8. Zdi se nam, kot da ima funkcija v navedenih točkah prevoje, vendar temu ni tako. Druga odvoda funkcije v navedenih točkah sta različna od nič. Če potegnemo premico skozi ti dve točki, graf seka še v dodatnih dveh točka, kateri označimo s P_9 in P_{10}.

Osredotočimo se na naš primer. Grafu bomo brez večjih težav poiskali zgoraj navedene točke. Točke $P_0(0,0)$ (dvojna ničla polinoma ter lokalni maksimum grafa funkcije), $P_2(1,-1)$ (prvi lokalni minimum funkcije) in $P_4(\sqrt{2},0)$(presečišče grafa funkcije z abscisno osjo). Ker je naš polinom simetričen glede na ordinatno os, so koordinate točk $P_1(-1,-1)$ (drugi lokalni minimum funkcije) in $P_3(-\sqrt{2},0)$(drugo presečišče funkcije z abscisno osjo) očitne. Če dobro pogledamo graf funkcije, se nam dozdeva, da bi lahko bila P_0 zlata točka daljice P_2P_5. Torej sta odseka daljice P_2P_5 glede na točko P_0 v zlatem razmerju. Ko bomo imeli izračuname vse koordinate točk, bomo na podlagi teh dokazali slednje.



Slika 2: simetrični polinom četrte stopnje $f(x) = x^4 - 2x^2$

S pomočjo zvez (2) in (3), lahko izračunamo preostale vrednosti funkcije $f(\varphi) = \varphi$ in $f(\varphi) = \varphi(\sqrt{2}) = -\varphi^{-1}$. Po izračunanih koodrinatah vidimo, da točki P_5 in P_8 ter P_6 in P_7 ležita na premicah $y = \pm x$. Sedaj lahko izračunamo še preostale točke na grafu, in sicer $P_6(\varphi, \varphi)$, $P_8(\frac{1}{\varphi}, -\frac{1}{\varphi})$ in $P_{10}(\sqrt{\varphi}, -\frac{1}{\varphi})$. S pomočjo izračunanih koordinat pa lahko določimo razmerja med točkami

$$P_3P_4 = \sqrt{2}P_1P_2,\ P_5P_6 = \varphi P_1P_2,\ P_7P_8 = \frac{P_1P_2}{\varphi} \text{ in } P_9P_{10} = \sqrt{\varphi}P_1P_2.$$

Vzemimo eno od zgornjih razmerij, naprimer prvo, in poglejmo, če res velja.

$$\begin{gathered}P_3P_4 = \sqrt{2}P_1P_2\\ P_3P_4 - \sqrt{2}P_1P_2 = 0\\ \sqrt{(2\sqrt{2})^2} - \sqrt{8} = 0\\ \sqrt{8} - \sqrt{8} = 0\end{gathered}$$

$\square$

Ostala razmerja pokažemo analogno.

Zdaj, ko imamo podane kooridnate točk, pokažimo, da sta odseka daljice P_2P_5 v zlatem razmerju. Koordinati točke $P_2(1, -1)$ sta nam znani že od prej, koordinati točke $P_5(\varphi, -\varphi)$ pa lahko izračunamo ($\varphi = (1+\sqrt{5})/2$). Uporamimo izraz (1), le da mu spremenimo oznake

$$\frac{P_2P_5}{P_0P_5} = \frac{P_0P_5}{P_0P_2}$$

$$|P_2P_5||P_0P_2| = |P_0P_5|^2$$

$$\sqrt{4(1+\varphi)^2} = 2\varphi^2$$

$$2(1+\varphi) = 2\varphi^2$$

$$2(1+\varphi) - 2\varphi^2 = 0$$

Iz izraza (2) sledi

$$2\varphi^2 - 2\varphi^2 = 0.$$

$\square$

Pa smo pokazali, da so odseki navedene daljice res v zlatem razmerju. Analogno dokažemo tudi preostale.

3 Splošen polinom četrte stopnje s prevoji

Ogledali si bomo, kako lahko polinome četrte stopnje s prevoji pridobimo iz simetričnega polinoma s pomočjo ustrezne afine transformacije.

Afina preslikava ali *afina transformacija* je preslikava med vektorskima prostoroma, ki je kompozitum linearne transformacije in translacije:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Lastnosti afine transformacije:

- premice slika v premice,
- vzporednice v vzporednice,
- tangente v tangente,

pri tem pa se dolžine vzporednih odsekov ohranjajo.

Preučimo simetrični polinom: $f(x) = x^4 + \omega x^2, \omega < 0$
in splošni polinom četrte stopnje: $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$.

Risanje grafa splošnega polinoma četrte stopnje bo potekal po istem principu kot pri simetričnem polinomu četrte stopnje. Najprej bomo poiskali začetno točko grafa. Določimo x_0 pri čemer je $g'''(x_0) = 0$. Sledi

$$\begin{gathered} g'''(x_0) = 24ax_0 + 6b = 0 \\ 4ax_0 + b = 0, a \neq 0 \\ x_0 = -b/4a. \end{gathered}$$

Izračunajmo še $k = \sqrt{g''(x_0)/2a\omega}$.
Poiskati moramo le še afino transformacijo, katera bo točke iz grafa simetrične funkcije slikala na graf splošnega polinoma četrte stopnje. Se pravi točko $(x, y) \mapsto (\overline{x}, \overline{y})$. Koordinate željene točke $(\overline{x}, \overline{y})$ dobimo s pomočjo sledeče afine transformacije (s faktorjem povečanja k v x smeri ter $|a|k^4$ v y smeri).

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g'(x_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & ak^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ g(x_0) \end{pmatrix}$$

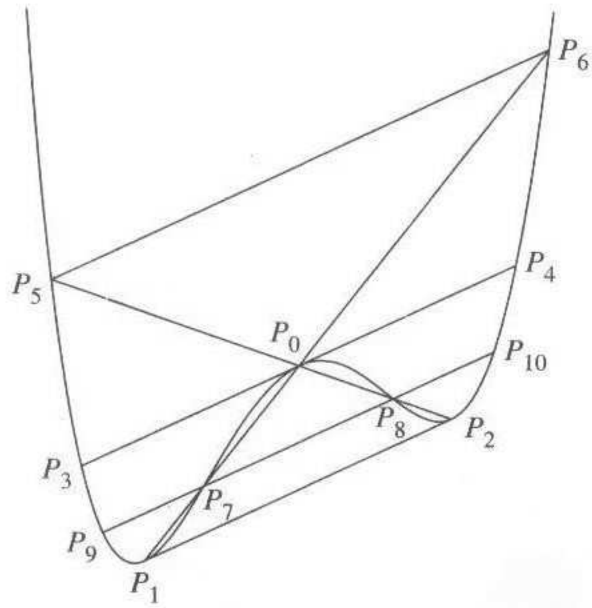
Če zgornjo enačbo poračunamo, dobimo enačbi za koordinati željene točke $\overline{x} = kx + x_0$ in $\overline{y} = kxg'(x_0) + yak^4 + g(x_0)$.

Rekli smo, da naša točka (x, y) leži na grafu funkcije f, torej velja $y = f(x) = x^4 + \omega x^2$ in $x = (\overline{x} - x_0)/k$. Ti dve enačbi ustavimo v izraz $\overline{y}$ in dobimo

$$\overline{y} = a(\overline{x} - x_0)^4 + \tfrac{1}{2}g(x_0)(\overline{x} - x_0)^2 + g'(x_0)(\overline{x} - x_0) + g(x_0).$$

Če si dobro ogledamo prejšnji izraz, je ta Taylorjev polinom četrte stopnje na g enak $g(x_0)$, torej točka $(\overline{x}, \overline{y})$ res leži na grafu g.

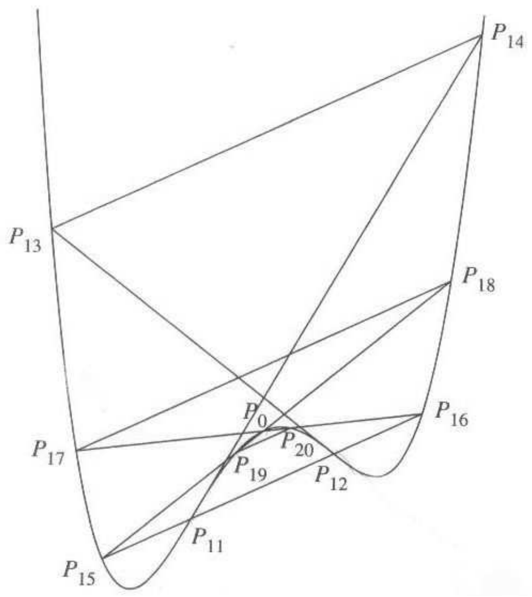
Če podrobneje pogledamo, se točka P_0 iz grafa funkcije f slika v točko $(x_0, g(x_0))$. Izračunani sta celo po istem principu, omenjenem že prej. Vse točke grafa funkcije f se preslikajo v točno določene točke grafa funkcije g. Vzemimo primer splošnega polinoma četrte stopnje (slika 3). Iz tega je razvidno, da so daljice P_1P_2 do P_9P_{10} vzporedne, kot daljice na grafu simetričnega polinoma f. Brez večjih tezav se prepričamo da točka P_0 deli daljici P_6P_1, P_5P_2 v zaltem razmerju. Podobno velja tudi za točki P_8 in daljico P_0P_1 ter P_8 in daljico P_0P_2. Ker smo uporabili afino transformacijo je zgoraj navedeno očitno, saj se vse lastnosti grafa simetrične funkcije f prenesejo na graf splošnega polinoma četrte stopnje s prevoji, v našem primeru na graf polinoma g.



Slika 3: polinom četrte stopnje $g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ in točke od P_0 do $P10$

4 Posebno razmerje

Od samega začetka se ukvarjamo s točkami, katerih še zdaleč ni zadosti. Opredelimo še nekaj novih točk na grafu polinoma četrte stopnje s prevoji. Začeli bomo z začetno točko P_0 in s prevojema grafa P_{11} ter P_{12} (slika 4). Če potegnemo tangento skozi prevoja grafa dobimo povsem nove točke, označimo jih P_{13}, P_{14}, P_{15} in P_{16}. Ko potegnemo premici skozi P_0 in P_{15}, dobimo dve novi presečišči, označimo jih P_{18} in P_{19} ter P_0 in P_{16}, novi presečišči poimenujemo P_{17} in P_{20}.



Slika 4: polinom četrte stopnje $g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ in točke od P_{11} do P_{20}

Vsa dosedaj naštete razmerja daljic (pridobljena s pomočjo točk označenih na grafu g) združimo v izrek:

IZREK. *Naj bodo P_0 do P_{20} točke na grafu polinoma četrte stopnje s prevoji, in $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, potem veljajo naslednje izjave:*

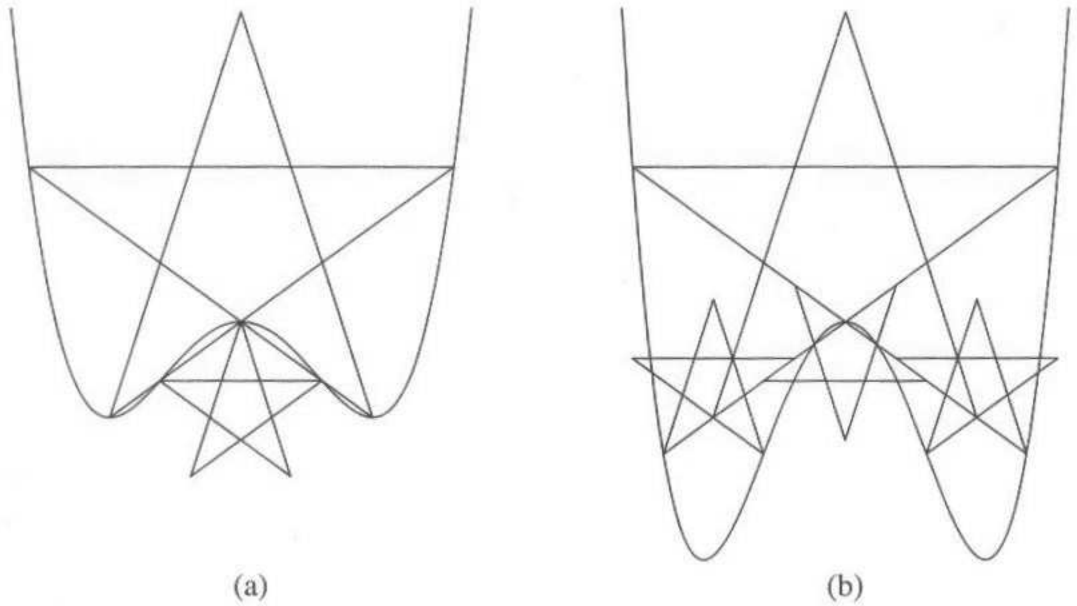
- *daljice $P_{2n-1}P_n$ (n=1,...,10) so vse vzporedne*
- *presečišča točk na grafu in vzporednice s tangento skozi $P_0(x_0, y_0)$ so simetrično nameščena okoli točke na premici z $x = x_0$*
- $P_3P_4 = \sqrt{2}P_1P_2$
- $P_5P_6 = \varphi P_1P_2$
- $P_7P_8 = P_1P_2/\varphi$
- $P_9P_{10} = \sqrt{\varphi}P_1P_2$
- $P_{13}P_{14} = 3P_1P_2$
- $P_{17}P_{18} = \varphi^2 P_1P_2$
- $P_{15}P_{11} = P_{11}P_{12} = P_{11}P_{12}/\varphi$
- $P_{19}P_{20} = P_{11}P_{12}/\varphi^2$

DOKAZ. Nove izjave (2, 7-11, del 1) lahko razmeroma enostavno preverimo za polinom $x^4 - 6x^2$, se pravi za $f(x)$, $\omega = -6$, (ta polinom je enostavnejši za uporabo točk P_{11} do P_{20}, kot prej uporabljeni simetrični polinom). Prevoji se preslikajo v prevoje z afino transtormacijo (v našem primeru $g''(\overline{x}) = ak^2 f''(x)$), zato prejšnji argumenti veljajo tudi v tem primeru.

$\square$

Če se vrnemo na začetek, kjer smo imeli pentagram s polinomom četrte stopnje (slika 1), vidimo da ta zadošča le 4. in 5. izjavi našega izreka. Podobno je prikazano tudi na sliki (slika 5a), kjer se manjiši pentagram prilagaja notranjosti večjega (v razmerju $1 : \varphi^2$). Nove izjave 9, 10 in 11 lahko podobno preverimo kot izjavi 4 in 5.

Pojav zlatega reza v navedenih polinomih odražajo najdena ozvezdja pentagrama in grafi polinomov četrte stopnje (slika 5b).



Slika 5: Polinom četrte stopnje in pentagrami

5 Povzetek

Če iz navedenih dognanj izluščimo bistvo vidimo, da smo našli karakteristično dolžino razmerja na grafu polinoma četrte stopnje s prevoji, vključno z več ponovitvami zlatega reza. Pomagali pa smo si seveda z afino transformacijo.

Literatura

[1] D.A. Brannan, M.F. Esplen, in J.J. Gray, *Geometry*, Combridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] H.T.R. Aude, Notes on quartic curves, *Amer. Math. Monthly* **56** (1949) 165-170.

[3] F. Irwin in H.N. Wright, Some properites of polynomial curves, *Annals Math.* (2 ser.) **19** (1917) 152-158.