

IZPIT IZ ALGEBRE I

15. JUNIJ 2009

1. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix},$$

kjer je a realno število.

2. Linearna preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je dana s predpisom

$$\mathcal{T}X = AX - \text{sl}(X) \cdot I,$$

kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Poišči matriko za \mathcal{T} v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
 (b) Določi bazi za $\ker \mathcal{T}$ in $\text{im } \mathcal{T}$.

3. Katero ploskev predstavlja enačba

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 14xy + 8xz - 8yz = 24?$$

Določi njene glavne osi in polosi.

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitna matrika.

- (a) Dokaži, da obstaja natanko ena simetrična matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, za katero je $e^B = A$.
 (b) Poišči B iz točke (a) za

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+e & 1-e \\ 0 & 1-e & 1+e \end{bmatrix}.$$