

Algebra 1 – FM: 2. izpit

24. 6. 2010

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko sreče!

Naloga 1 [25 točk]

Dana je množica $G = \{U(t); t \in \mathbb{C}\}$, kjer je

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokaži, da je množica G grupa za operacijo množenja matrik. Kateri znani grupi je izomorfná? Odgovor utemelji!

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Določi vse matrike $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, za katere je rešljiva matrična enačba $XA = X^T A + B$. Koliko rešitev ima in kakšne oblike so rešitve za izbrani B ?

Naloga 3 [25 točk]

Za matriko

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

poišči Jordanovo kanonično formo in prehodno matriko.

Naloga 4 [25 točk]

Matrika A je podana bločno z

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Matriki A in A_{22} sta obrnljivi. Dokaži, da je potem tudi matrika

$$B = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

obrnjljiva.