

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

17. DECEMBER 2008

1. Izračunaj determinanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Dana sta vektorska podprostora

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(0) = 0, p(1) = p(-1)\}$$

in

$$V = \text{Lin}\{x^3 + x^2 - x - 1, x^2 - 1, x^3 - x^2 - x + 1\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3. Poišči baze prostorov U , V , $U + V$ in $U \cap V$.

3. Dana je množica

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pokaži, da je U vektorski podprostor v prostoru vseh realnih 2×2 matrik. Ugotovi, katere od naslednjih množic so njegova baza in katere njegovo ogrodje:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{B} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{C} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{D} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Odgovore utemelji.

4. Naj bo

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}.$$

Preslikava $f: \mathbb{R} \rightarrow G$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

(a) Dokaži, da je (G, \cdot) grupa za običajno množenje matrik.(b) Dokaži, da je f homomorfizem iz grupe $(\mathbb{R}, +)$ v grupo (G, \cdot) .