

### 3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

25. MAREC 2009

1. Naj bosta  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  linearno neodvisna vektorja v  $\mathbb{R}^3$ . Linearna preslikava  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je dana s predpisom

$$A\vec{x} = 2\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} + (\vec{x} \times \vec{a}) \times \vec{b}.$$

- (a) Poišči matriko za  $A$  v bazi  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ .  
(b) Za katere pare vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  preslikava  $A$  ni obrnljiva? V teh primerih določi  $\ker A$  in  $\text{im } A$ .

2. Dana je matrika  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Linearna preslikava  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je dana s predpisom

$$TX = AX - XA.$$

- (a) Poišči matriko za  $T$  v bazi  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ .  
(b) Poišči matriko za  $T$  v bazi  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ .

3. Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

poišči Jordanovo kanonično formo in prehodno matriko.

4. Naj bosta  $A$  in  $B$  realni  $n \times n$  matriki.

- (a) Če je matrika  $A$  obrnljiva, dokaži, da sta matriki  $AB$  in  $BA$  podobni.  
(b) Naj bo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Poišči tako matriko  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , da matriki  $AB$  in  $BA$  ne bosta podobni.