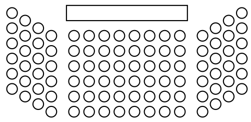
Algebra 1: 3. kolokvij, 30. 3. 2010

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko sreče!

Ime in priimek



Sedež

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 opremljenim s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

sta dana podprostor V in polinom r

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(1) = p(-2) = 0\}, \qquad r(x) = x^2.$$

Poišči ortonormirano bazo za V in izračunaj pravokotno projekcijo polinoma r na podprostor V.

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo V vektorski prostor vseh realnih 2×2 matrik in naj bo preslikava $T : V \to V$ dana s predpisom

$$T(A) = MA - AM,$$

kjer je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi kaki bazi za $\ker T$ in $\operatorname{im} T$. Poišči lastne vrednosti preslikave T.

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino $x - 2y + 2z = 0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko tega zrcaljenja v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Naloga 4 [25 točk]

Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalni matriki. Dokaži:

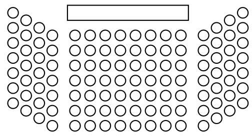
(a) $\det(A^2 + AB) = \det(I + AB^T)$.

(b) $\det(A^2 + AB) = \det(BA + B^2)$.

(c) Če je $\det A + \det B = 0$, potem je $\det(A + B) = 0$.

Algebra 1: 3. kolokvij, 30. 3. 2010

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko sreče!



1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Sedež

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 opremljenim s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

sta dana podprostor V in polinom r

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(1) = p(-2) = 0\}, \qquad r(x) = x^2.$$

Poišči ortonormirano bazo za V in izračunaj pravokotno projekcijo polinoma r na podprostor V.

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo V vektorski prostor vseh realnih 2×2 matrik in naj bo preslikava $T : V \to V$ dana s predpisom

$$T(A) = MA - AM,$$

kjer je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi kaki bazi za $\ker T$ in $\operatorname{im} T$. Poišči lastne vrednosti preslikave T.

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino $x - 2y + 2z = 0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko tega zrcaljenja v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Naloga 4 [25 točk]

Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalni matriki. Dokaži:

(a) $\det(A^2 + AB) = \det(I + AB^T)$.

(b) $\det(A^2 + AB) = \det(BA + B^2)$.

(c) Če je $\det A + \det B = 0$, potem je $\det(A + B) = 0$.