18. Domača naloga - Adjungirana preslikava
Algebra 1, finančna matematika

1. Prostor $\mathbb{R}^2$ opremimo s skalarnim produktom
$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$
Naj linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v standardni bazi pripada matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Izračunaj
$$\mathcal{A}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt
$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$
Naj bo $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava dana s predpisom
$$(Ap)(x) = xp'(x) \quad .$$
Določi $A^*(x^2 - 1)$.

3. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt
$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$
Naj bo $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava dana s predpisom
$$(Ap)(x) = p'(x) \quad .$$
Določi $A^*(x^2 - x - 1)$.

4. Prostor $\mathbb{R}^2$ opremimo s skalarnim produktom
$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$
Naj linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v standardni bazi pripada matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}^*$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^2$.

5. V prostoru $\mathbb{R}^2$ je dan skalarni produkt
$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$
Poišči matriko preslikave A^* v standardni bazi, če ima preslikava A v standardni bazi matriko
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

7. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^4$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

8. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana linearna preslikava, ki ima lastno vrednost -2. Za vsak vektor u, ki leži na ravnini $x+z=0$ velja $Au = 2u$. Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9. Sebi adjungirana linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima dvojno lastno vrednost 2 in velja
$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

10. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana preslikava, ki ima lastno vrednost 3. Za vsak vektor v, ki leži na ravnini $x+y=0$, velja $Av = -v$. Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Rešitve:

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. 0

3. $-6x^2 - \frac{1}{2}x + 4$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

7. $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$