8. Domača naloga – Grupe
Algebra 1, finančna matematika

1. Pokaži, da je množica
$$\{a + b\sqrt{3};\ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$$
grupa za množenje.

2. Na potenčni množici dane množice M definiramo simetrično razliko množic s pravilom:
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
Pokaži, da je potenčna množica za dano operacijo grupa.

3. Naj za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ velja $ad - bc = 1$. V množici $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ smiselno definiramo operacije s številom ∞ (tako, da so ustrezna pravila skladna z limitami).
   (a) Pokaži, da je vsaka preslikava oblike
   $$f\colon\ \mathbb{R} \cup \infty \to \mathbb{R} \cup \infty, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
   bijekcija.
   (b) Pokaži, da vse možne preslikave iz točke (a) tvorijo grupo za komponiranje preslikav.

4. Pokaži, da množica ostankov pri delitvi s 6, označimo jo z $\mathbb{Z}_6$, ni grupa za množenje; množica $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ pa je grupa za moženje.

5. Naj bo
$$G \quad = \quad \{z \in \mathbb{C};\ z = 2^k\big(\cos(m\pi\sqrt{2}) + i\sin(m\pi\sqrt{2})\big), k, m \in \mathbb{Z}\},$$
Pokaži, da je G podgrupa v grupi $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje.

6. Dani sta grupi $(G, *)$ in $(H, \circ)$. V množici $G \times H$ definiramo operacijo
$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2) \quad .$$
Pokaži, da je množica $G \times H$ je grupa za to operacijo.

7. Naj bo $(G, +)$ komutativna grupa, A pa poljubna množica. Naj bo $f : G \to A$ bijektivna preslikava. Dokaži, da je A komutativna grupa za operacijo
$$s \circ t = f(f^{-1}(s) + f^{-1}(t)).$$