

**18. Domača naloga - Jordanova kanonična forma**  
**Algebra 1, finančna matematika**

1. Poišči Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Kaj je prehodna matrika?

2. Določi Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kaj je prehodna matrika?

3. Poišči Jordanovo kanonično formo in prehodno matriko za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2a - 1 & a \\ -1 & 2 & 4a & 2a + 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno Jordanovo kanonično formo v odvisnosti od parametra  $a$ . Za  $a = 0$  poišči tudi prehodno matriko.

5. O linearni preslikavi  $A: \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$  vemo naslednje: edini lastni vrednosti sta 1 in 2. Lastni podprostor za 1 je trirazsežen, lastni podprostor za 2 je dvorazsežen. Velja še

$$\text{rang}(A - I)^5 = \text{rang}(A - I)^4 = 3.$$

Kolikšna je razsežnost jedra preslikave  $(A - I)^2$ ? Napiši vse možne Jordanove kanonične forme za  $A$ .

6. Linearna preslikava  $A$  ima karakteristični in minimalni polinom

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^6, \quad m_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2(\lambda - 1).$$

Poleg tega velja še:

$$\dim \ker(A^2 - I) = 7, \quad \dim \ker(A^2 - I)^2 = 10.$$

Poišči karakteristični in minimalni polinom preslikave  $A^2$  ter Jordanovo kanonično formo preslikav  $A^2$  in  $A$ .

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj  $A^{11} + A^4 + A^{2000}$ .

8. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko  $B$ , za katero velja  $B^3 = A$ .

9. Izračunaj  $\exp(A)$  za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Matrika  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$  je spodnjetrokotna matrika (to je  $a_{ij} = 0$  za  $i < j$ ), ima diagonalne elemente paroma različne, velja pa

$$e^{a_{11}} = e^{a_{22}} = \dots = e^{a_{nn}}.$$

Izračunaj  $\exp(A)$ .

*Rešitve:*

1.  $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 18 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -6 & 1 \end{pmatrix}$

2.  $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Če  $a \neq 0$ , je  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Če je  $a = 0$ , je  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

5.  $\dim \ker(A - I)^2 \in \{5, 6\}$ . Možne jordanse forme: Za lastno vrednost 2 imamo vedno eno  $1 \times 1$  in eno  $2 \times 2$  kletko. Za lastno vrednosti imamo naslednje tri možnosti za kletke: (a) ena  $1 \times 1$ , dve  $3 \times 3$ , (b) dve  $2 \times 2$ , ena  $3 \times 3$ , (c) ena  $1 \times 1$ , ena  $2 \times 2$ , ena  $4 \times 4$ .
6.  $p_{A^2}(\lambda) = (\lambda - 1)^{12}$ ,  $m_{A^2}(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ .  $A^2$  ima edino lastno vrednost 1, Jordanova kanonična forma za  $A^2$  pa ima 4 kletke velikosti  $1 \times 1$ , eno kletko velikosti  $2 \times 2$  in 2 kletki velikosti  $3 \times 3$ . Kanonična forma za  $A$  ima dve kletki velikosti  $3 \times 3$  za lastno vrednost 1, za lastno vrednost  $-1$  pa imamo eno kletko velikosti  $2 \times 2$  in štiri velikosti  $1 \times 1$ .
7. 
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
8. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
9. 
$$\begin{pmatrix} e & 4e & 4e \\ 2e & 6e & 5e \\ -2e & -5e & -4e \end{pmatrix}$$
10.  $\exp(A) = e^{a_{11}} I$ .