16. Domača naloga - Lastne vrednosti in lastni vektorji
Algebra 1, finančna matematika

1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poišči njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje. Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki? Kateri? Poišči še prehodno matriko.

2. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

3. Matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & b & 0 \\ -1 & c & -1 \end{bmatrix}$$
ima dvojno lastno vrednost 1. Lastni podprostor pri tej lastni vrednosti je napet na vektorja
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Določi števila a, b in c. Poišči tretjo lastno vrednost in lastni vektor.

4. Matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}.$$
ima lastne vrednosti 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 2 je
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Določi števila a, b in c.

5. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in $b \neq 0$. Poišči lastne vrednosti matrike
$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$
ter njihove algebraične in geometrične večkratnosti. Poišči tudi lastne vektorje in lastne podprostore.

6. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki?

7. Naj bodo $a_1, a_2, ..., a_n$ dani linearno neodvisni vektorji iz $\mathbb{R}^n$. O linearni preslikavi A vemo:

$$A\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ;$$

$$Aa_1 = a_2,\ A^2a_1 = a_3,\ ...,\ A^{n-1}a_1 = a_n,\ A^n a_1 = a_1\ .$$

Določi lastne vrednosti, lastne vektorje in karakteristični polinom preslikave A.

8. Dana je preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathcal{F}X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

9. Naj bosta a in b linearno neodvisna vektorja iz $\mathbb{R}^n$ in matrika $C = ab^\top + ba^\top$. Pokaži, da je

$$\mathrm{Lin}\{a, b\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle = 0\}$$

lastni podprostor matrike C za lastno vrednost 0. Določi še ostale lastne vrednosti in lastne vektorje.

10. Za realni 2×2 matriki

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

naj bo

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} ax & bx & ay & by \\ cx & dx & cy & dy \\ az & bz & at & bt \\ cz & dz & ct & dt \end{bmatrix}.$$

Pokaži: če je λ lastna vrednost za A in μ lastna vrednost za B, potem je $\lambda\mu$ lastna vrednost za $A \otimes B$.

Rešitve:

1. $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$
   da, $\quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

2. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $a = 2, b = 1, c = 1, \lambda_3 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $a = 1, b = -1, c = 1$

5. $\lambda_{1,2,3,4} = a, \ a(a) = 4, \ g(a) = 3,$
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_a = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

6. $\lambda_{1,2,3} = 2, \lambda_4 = -1,$
   $L_2 = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad L_{-1} = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad$ ne.

7. $\lambda = 1$ je edina (realna) lastna vrednost, če je n lih, če pa je n sod, sta 1 in -1 lastni vrednosti. Lastni vektor za 1 je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, l. vektor za -1 (če je n sod) pa je $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_n$.

8. Lastne vrednosti: -2, -1, 1, 0. Lastni vektorji: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

9. $\lambda_{1,2} = \langle a, b \rangle \pm ||a|| \cdot ||b||$. $v_{1,2} = \mp ||b|| a + ||a|| b$.