13. Domača naloga - Linearne preslikave
Algebra 1, finančna matematika

1. Naj bo preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom
$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$
Ugotovi, ali je linearna.

2. Naj bo preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom
$$A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \vec{x}.$$
Ugotovi, ali je linearna.

3. Naj bo preslikava $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dana s predpisom
$$(Ap)(x) = x^2 p(\frac{1}{x}).$$
Ugotovi, ali je linearna.

4. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom
$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y + z \\ x - y - 2z \\ -2x - 3z \end{bmatrix}.$$
Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

5. Dana sta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava dana s predpisom
$$A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} + 2\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}.$$
Pokaži, da je A linearna preslikava. V primeru
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

6. Dan je vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}.$$
Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

7. Pokaži, da je preslikava $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ podana s predpisom
$$A(p(x)) = (x^2 - x)p''(x) + (2x - 1)p'(x)$$
linearna. Določi njeno jedro in sliko.

8. Dana je linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$
$$(\mathcal{A}p)(x) = (x - 2)(p'(x) + xp(1)).$$
Določi njeno jedro in sliko.

9. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
in linearna preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$
$$\mathcal{T}(X) = AX - XA.$$
Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{T}$.

10. Naj bo $\mathcal{A}$ pravokotna projekcija na premico v $\mathbb{R}^3$ z enačbo
$$\frac{x}{-2} = y = \frac{z}{-1}.$$
Določi jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

Rešitve:

1. Da.
2. Ne.
3. Da.
4. baza $\mathrm{Ker}\, \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, baza $\mathrm{Im}\, \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.
5. baza $\mathrm{Ker}\, \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, baza $\mathrm{Im}\, \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
6. baza $\mathrm{Ker}\, \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, baza $\mathrm{Im}\, \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
7. $\mathrm{Ker}\, \mathcal{A} = Lin\{1\}$, $\mathrm{Im}\, \mathcal{A} = Lin\{6x^2 - 4x, 2x - 1\}$.

8. Ker $\mathcal{A} = Lin\{x^2 - 3\}$, Im $\mathcal{A} = Lin\{x^2 - 2x, x^2 - x - 2\}$.

9. baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

10. Ker $\mathcal{A} = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, Im $\mathcal{A} = Lin \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.