

5. Domača naloga – Matrične enačbe, inverz matrike, permutacije
Algebra 1, finančna matematika

1. Izračunaj inverze naslednjih matrik:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(d) D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Določi vsa taka števila a , da bo matrika A obrnljiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru izračunaj inverz.

3. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matriki $6A^{-1} + A^2$ ter $4B^{-1} + B^T$.

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, ki reši enačbo

$$AXA^T = A^T A.$$

5. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo

$$XA + XB - C = I.$$

6. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Reši matrično enačbo

$$AX + 2X = A + I$$

7. Zmnoži permutacije:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 10 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. Izračunaj inverze permutacij:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 10 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

9. Preštej inverzije in izračunaj signature permutacij:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 10 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. Koliko je permutacij reda 2 v množici vseh permutacij petih elementov S_5 ? Permutacija π je reda 2, če velja $\pi \neq \text{id}$ in $\pi^2 = \text{id}$.

Rešitve:

1. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $D^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $a \neq 2$ in $a \neq -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - a - 2} \begin{bmatrix} a^2 & -2a^2 + a + 2 & a & -a - 2 \\ -a & a & -1 & a \\ 2 & -2 & a - 1 & -2 \\ -4 & a^2 - a + 2 & -2a + 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3. 6A^{-1} + A^2 = 7I, 4B^{-1} + B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$4. X = A^{-1}A^T A(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{bmatrix}$$

$$5. X = (I + C)(A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$6. X = (A + 2I)^{-1}(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. (a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 7 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. (a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 5 & 8 & 10 & 4 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$9. (a) \text{inv} = 8, \text{sgn} = 1$$

$$(b) \text{inv} = 4, \text{sgn} = 1$$

$$(c) \text{inv} = 3, \text{sgn} = -1$$

$$(d) \text{inv} = 26, \text{sgn} = 1$$

10. 25