14. Domača naloga - matrike in linearne preslikave
Algebra 1, finančna matematika

1. Linearna preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ ima v standardnih bazah matriko
$$A=\begin{bmatrix}1&3&1&4\\1&2&1&3\\2&2&2&4\end{bmatrix}.$$
Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

2. Dana sta vektorja $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$
$$\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \vec{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$
Naj bo $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ linearna preslikava dana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x}=\langle\vec{x},\vec{a}\rangle\vec{b}+2\langle\vec{x},\vec{b}\rangle\vec{a}.$$
Poišči matriko za $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

3. Dana je linearna preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_3[x]$
$$(\mathcal{A}p)(x)=(x^2-2)\Big(p'(x)+xp(-1)\Big).$$
Poišči njeno matriko v bazah $B_1=\{x^2,x,1\}$ za $\mathbb{R}_2[x]$ in $B_2=\{x^3,x^2,x,1\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Linearna preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(p(x))=(x^2-x)p''(x)+(2x-1)p'(x)$$
Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v bazi $\{x^2,x,1\}$.

5. Dana je linearna preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$
$$(\mathcal{A}p)(x)=(x-2)(p'(x)+xp(1)).$$
Poišči njeno matriko v bazi $\{x^2,x,1\}$.

6. Pokaži, da je preslikava $\mathcal{T}:\mathbb{R}^{2,2}\to\mathbb{R}^{2,2}$ podana s predpisom
$$\mathcal{T}(X)=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}X$$
linearna. Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{T}$ v bazi
$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}.$$

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in linearna preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathcal{T}(X) = AX - XA.$$

Poišči matriko preslikave $\mathcal{T}$ v bazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

8. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ima v bazi $\{1, x, x^2\}$ matriko

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v bazi $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

9. Linearna preslikava $T_A\colon\ \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$T_A(X) := AXA^{-1}\,,$$

kjer je A neka obrnljiva matrika iz $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Določi vse matrike A, za katere preslikavi T_A v bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ustreza matrika

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitve:

1. baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

   baza Im $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

9. $A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$.