15. Domača naloga - Matrike in linearne preslikave
Algebra 1, finančna matematika

1. Linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pripada v standardni bazi $\mathcal{S}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna matrika ji pripada v bazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}?$$

2. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima v bazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

matriko

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ -x + y - 3z \\ -x - 2z \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v bazi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deluje takole

$$\mathcal{A}\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \mathcal{A}\vec{b} = 2\vec{a}, \quad \mathcal{A}\vec{c} = \vec{c}.$$

Poišči matriki za to linearno preslikavo v bazi $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

5. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ so dani polinomi

$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x^2 + x + 1.$$

Poišči prehodno matriko iz baze $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ na standardno bazo $\mathcal{S} = \{x^2, x, 1\}$. Za linearno preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ velja

$$\mathcal{A}p_1 = p_2 + p_3, \quad \mathcal{A}p_2 = p_2, \quad \mathcal{A}p_3 = p_1.$$

Poišči njeno matriko v bazi $\mathcal{B}$ in matriko v bazi $\mathcal{S}$.

6. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino $x - y - z = 0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko tega zrcaljenja v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

7. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na premico $x = y = -z/2 = 0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko tega zrcaljenja v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

8. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deluje takole:

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x^2 - 2)p(1) - xp'(x).$$

Poišči njeno matriko v bazi $S = \{1, x, x^2\}$ in v bazi $\mathcal{B} = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$.

10. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x - 2)(p'(x) + xp(1)).$$

Določi matriko za

$$\mathcal{A} : (\mathbb{R}_2[x], \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}_2[x], \mathcal{B}_2)$$

v bazah

$$\mathcal{B}_1 = \{1,\ x - 1,\ x^2 - 3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{x^2 - 2x,\ x - 2,\ 1\}.$$

Rešitve:

1. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -28 & 24 & -3 \end{bmatrix}$

4. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

8. $A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -7 \\ 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

10. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$