21. Domača naloga - Normalne preslikave
Algebra 1, finančna matematika

1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$
Ali je matrika A sebi adjungirana, ali je normalna, ali je unitarna, ali je pozitivno definitna?

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$
Ali je matrika A sebi adjungirana, ali je normalna, ali je unitarna, ali je pozitivno definitna?

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$
(a) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika sebi adjungirana.
(b) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika normalna.

4. Določi manjkajoča števila v matriki A tako, da bo unitarna.
$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2i & * & * \\ 2i & -i & * \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}.$$
Ali je tako dobljena matrika sebi adjungirana, ali je normalna?

5. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$
Pokaži, da sta lastna vektorja pravokotna v skalarnem produktu
$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}.$$
Ali je matrika A v tem skalarnem produktu normalna, ali je sebi adjungirana, ali je unitarna?

6. Dana je matrika
$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Pokaži, da predstavlja rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije.

7. Dana je matrika
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Pokaži, da predstavlja zrcalno rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije ter zrcalno ravnino.

8. Naj bo V končnorazsežen realen vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle .,. \rangle$ in $a, b \in V$ dana vektorja.
(a) Pokaži, da je preslikava $A : V \to V$
$$Ax = \langle x, a \rangle b$$
linearna in določi preslikavo A^*.
(b) Kdaj je preslikava A sebi adjungirana?
(c) Kdaj je preslikava A normalna?

9. Naj bosta x, y neničelna vektorja evklidskega prostora. Pokaži, da taka pozitivno definitna preslikava A, da je $Ax = y$ natanko takrat, ko je $\langle x, y \rangle > 0$.

10. (a) Poišči normalni matriki $A, B \in \mathbb{C}^{2,2}$ za kateri matrika AB ni normalna.
(b) Naj bosta $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ normalni matriki, za kateri velja $AB^* = B^*A$. Dokaži, da je matrika AB normalna.

Rešitve:

1. je sebi adjungirana, je normalna, je unitarna, ni pozitivno definitna

2. je sebi adjungirana, ni unitarna, je normalna, je pozitivno definitna

3. (a) $a = 2$, b poljuben
(b) $a = 2$, b poljuben ali $a = -2, b = 1$

4. $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2i & 2i & 1 \\ 2i & -i & -2 \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}$, ni sebi adjungirana, je normalna

5. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,
je normalna, ni sebi adjungirana, je unitarna

6. os $x = z = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

7. os $\frac{x}{1-\sqrt{2}} = -y = z$, $\varphi = \arccos \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, zrcalna ravnina $(1-\sqrt{2})x - y + z = 0$

8. (a) $A^*x = \langle x, b \rangle a$
(b) kadar sta vektorja a in b linearno odvisna
(c) kadar sta vektorja a in b linearno odvisna ali pravokotna