

**18. Domača naloga - Skalarni produkt**  
**Algebra 1, finančna matematika**

1. Podprostor  $V$  in vektor  $\vec{v}$  prostora  $\mathbb{R}^4$  (opremljenega s standardnim skalarnim produktom) sta dana takole:

$$V = \mathcal{L}in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo za  $V$  in izračunaj pravokotno projekcijo vektorja  $\vec{v}$  na podprostor  $V$ .

2. V prostoru  $\mathbb{R}^3$  z običajnim skalarnim produktom je dan podprostor

$$W = \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora  $W$ . Poišči pravokotno projekcijo vektorja  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  na podprostor  $W$ .

3. Pokaži, da je

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle = 2xa + xb + ya + yb$$

skalarni produkt na vektorskem prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Poišči kako ortonormirano bazo prostora  $\mathbb{R}^2$ .

4. V prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  polinomov stopnje največ 2 je dan predpis

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Pokaži, da je to skalarni produkt. Poišči kako ortonormirano bazo prostora  $\mathbb{R}_2[x]$

5. V prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  polinomov stopnje največ 2 opremljenim s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

sta dana podprostor  $V$  in polinom  $p$

$$V = \mathcal{L}in\{x^2 - 1, x - 1\}, \quad p(x) = x^2.$$

Poišči ortonormirano bazo za  $V$  in izračunaj pravokotno projekcijo polinoma  $p$  na podprostor  $V$ .

6. V prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

in podprostor

$$U = \mathcal{L}\{x^2 - 1, x^2 - 2x + 1\}.$$

Poišči kako ortonormirano bazo prostora  $U$  in jo dopolni do ortonormirane baze prostora  $\mathbb{R}_2[x]$ .

7. V prostoru  $\mathbb{R}_3[x]$  polinomov stopnje največ 3 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \int_0^1 p'(x)q'(x)dx.$$

Poišči kako ortonormirano bazo podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(x) = ax + bx^3, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

8. V prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 3p(1)q(1).$$

Poišči kakšno ortonormirano bazo podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x]; p(1) = p'(-1)\}.$$

9. Vektorski prostor  $\mathbb{R}_2[x]$  je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Naj bo  $V = \mathcal{L}in\{1 + x\}$ . Poišči  $V^\perp$ !

10. V prostoru  $\mathcal{L}in\{1, \cos t, \sin t\}$  je dan skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$

Določi pravokotno projekcijo funkcije  $\cos t$  na jedro prostor  $V = \mathcal{L}in\{\sin t, 1 - \cos t\}$ .

*Rešitve:*

$$1. ONB_V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array} \right] \right\}, \text{proj}_V \vec{v} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

2.  $ONB_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}, \text{proj}_W \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
3.  $ONB = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$
4.  $ONB = \{1/\sqrt{3}, (x-1)/\sqrt{2}, (3x^2-6x+1)/\sqrt{6}\}$
5.  $ONB_V = \{x^2-1, \frac{1}{2}(x-x^2)\}, \text{proj}_V p = \frac{1}{2}(x^2-x)$
6.  $ONB_V = \{x^2-1, \frac{1}{2}(x^2-x)\}, ONB_{\mathbb{R}_2[x]} = \{x^2-1, \frac{1}{2}(x^2-x), \frac{1}{2}(x^2+x)\}$
7.  $ONB_V = \left\{ x, \frac{\sqrt{5}}{2}(x^3-x) \right\}$
8.  $ONB_V = \left\{ \frac{1}{2}x, \frac{1}{\sqrt{21}}(x^2+x-3) \right\}$
9.  $V^\perp = \text{Lin} \{2-3x, 5x^2-2x-2\}$
10.  $\frac{\pi^2}{3\pi^2-16}(\cos t + \frac{4}{\pi} \sin t - 1)$