

2. Domača naloga – Vektorji v \mathbb{R}^3
Algebra 1, finančna matematika

1. Izračunaj ploščino, dolžine stranic in notranje kote trikotnika z oglišči $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 0, 2)$.
2. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ naj bodo paroma pravokotni in naj velja $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ in $\|\vec{c}\| = 2$.
 - (a) Izračunaj $|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$.
 - (b) Določi volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{b} - 2\vec{c}$ in $\vec{a} + 3\vec{c}$.
3. Vektorji \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} so enotski vektorji in zanje velja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = 45^\circ$ ter $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$. Izračunaj volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{a} in $\vec{c} + 2\vec{b}$.

4. Pokaži:

$$\langle (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}), \vec{c} + \vec{a} \rangle = 2\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

5. Pokaži:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{d} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{d} \rangle \vec{a} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d}.$$

6. Pokaži, da za enotska vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ velja enakost

$$\left\langle (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^3.$$

7. Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dana nekolinearna vektorja. Reši enačbo

$$\vec{x} \times (\vec{a} + \vec{b}) + \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b}$$

8. Naj bosta vektorja \vec{a} in \vec{b} linearno neodvisna. Reši enačbo

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{x} + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \vec{a}.$$

9. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} enako dolga vektorja v prostoru \mathbb{R}^3 , ki oklepata kot 60° . Reši vektorsko enačbo

$$\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{x}.$$

10. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} neničelna vektorja v prostoru, ki oklepata kot 30° , za njuni dolžini pa velja $|\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$. Reši vektorsko enačbo

$$\langle \vec{x}, \vec{a} + \vec{b} \rangle \vec{a} + \vec{x} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b} + 3\|\vec{a}\|^2 \vec{b}.$$