11. Domača naloga – Vektorski prostori
Algebra 1, finančna matematika

1. Pokaži, da je množica
$$A = \{p \in \mathbb{R}_n[x], p(x) = p(1-x)\}$$
vektorski podprostor v prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ polinomov stopnje največ n.

2. Naj bodo vektorji $x, y, z, w \in \mathbb{R}^6$ linearno neodvisni. Pokaži, da so tudi vektorji
$$x + y - z,\ x + z - w,\ x + 2z,\ y + z + w$$
linearno neodvisni.

3. Ugotovi, ali je množica
$$\{x^2 + 3x - 2, x^2 + 4x - 3, x^2 + 2x + 1\}$$
linearno neodvisna.

4. Dan je vektorski prostor
$$U = Lin\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}.$$
Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

5. Dana je množica $U \subset \mathbb{R}^3$
$$U = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x - t(y + 2z - 2) = 4\right\}.$$
Določi parameter t tako, da bo U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Poišči bazo prostora U.

6. Dana je matrika $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ in množica
$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2,2}; AJ^T + JA^T = 0\}.$$
Pokaži, da je U vektorski podprostor v prostoru vseh realnih 2×2 matrik. Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

7. Dana je množica

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pokaži, da je U vektorski podprostor v prostoru vseh realnih 2×2 matrik. Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

8. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 je dana množica

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x];\; p''(1) = p'(1),\; p(1) = 0\}.$$

Pokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$. Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

9. Dan je vektorski podprostor

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(1) = p(-1), p''(0) = 2p(1)\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3. Poišči kakšno bazo prostora U in določi $\dim U$.

10. Naj bo $n \geq 4$ in $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor vseh polinomov stopnje največ n. Dana je množica

$$U = \{p \in \mathbb{R}_n[x]; p(1) = p(-1), p''(0) = 2p(1)\}.$$

(a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}_n[x]$.
(b) Poišči kakšno bazo prostora U in določi $\dim U$.
(c) Dopolni bazo U do baze vsega $\mathbb{R}_n[x]$.

Rešitve:

3. Da.

4. baza $U = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim U = 2$

5. $t = 2$, baza $U = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

6. baza $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim U = 2$

7. baza $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim U = 2$

8. baza $U = \left\{x^3 + 3x - 4, x^2 - 1\right\}$, dim $U = 2$

9. baza $U = \left\{x^3 - x, x^2\right\}$, dim $U = 2$

10. Če je n sodo število, je baza $U = \left\{x^n - 1, n^{n-1} - x, ..., x^4 - 1, x^3 - x, x^2\right\}$.
    Če je n liho število, je baza $U = \left\{x^n - x, n^{n-1} - 1, ..., x^4 - 1, x^3 - x, x^2\right\}$.
    dim $U = n - 1$
    baza $\mathbb{R}_n[x] =$ baza $U \cup \{x, 1\}$.