ANALIZA 1 (fin) - 1. pisni izpit REŠITVE

4. 2. 2009

1. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadošča rekurzijski zvezi

$$x_{n+1} = -x_n + \frac{n}{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

(a) Z matematično indukcijo dokaži, da je formula za splošen člen enaka

$$x_n = (-1)^n \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{6n-2}{9\cdot 2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Določi število stekališč (in njihove vrednosti) zaporedja $(x_n)_n$ v odvisnosti od začetnega člena x_0. Odgovor utemelji.

Rešitev: (a) Pri $n = 0$ je očitno leva stran enaka desni, še indukcijski korak: indukcijska predpostavka (i.p.) je

$$x_n = (-1)^n \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{6n-2}{9\cdot 2^n}$$

hočemo dokazati

$$x_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{6(n+1)-2}{9\cdot 2^{n+1}}.$$

Torej

$$x_{n+1} = -x_n + \frac{n}{2^n} = (i.p.) = -\left((-1)^n \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{6n-2}{9\cdot 2^n}\right) + \frac{n}{2^n} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) - \frac{6n-2}{9\cdot 2^n} + \frac{9n}{9\cdot 2^n} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{3n+2}{9\cdot 2^n} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{3(n+1)-1}{9\cdot 2^n} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left(x_0 + \frac{2}{9}\right) + \frac{6(n+1)-2}{9\cdot 2^{n+1}}.$$

(b) Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{6n-2}{9\cdot 2^n} = 0$, o stekališčih zaporedja odloča le člen $(-1)^n(x_0 + 2/9)$. Ta pa ima očitno dve stekališči $\pm(x_0 + 2/9)$, če je $x_0 \neq -2/9$ ter eno stekališče 0, ě je $x_0 = -2/9$.

2. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = 19x^2 + 4xy + 16y^2$$

pri vezi

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 = 50.$$

Rešitev: Gre za vezan ekstrem, rešiti je treba sistem enačb $f_x = \lambda g_x$, $f_y = \lambda g_y$, $g = 0$, če označimo $g(x,y) = 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 50$. Dobimo

$$38x+4y = \lambda(12x-4y),\ 4x+32y = \lambda(-4x+18y),\ 6x^2-4xy+9y^2 = 50.$$

Sistem je moč rešiti na mnogo načinov; en je ta: prvi dve enačbi delimo (kar smemo, preveri zakaj) in se znebimo λ:

$$\frac{38x+4y}{4x+32y} = \frac{12x-4y}{-4x+18y} \Longrightarrow$$

$$(38x+4y)(-4x+18y) - (12x-4y)(4x+32y) = 0 \Longrightarrow$$

$$(x-2y)(2x+y) = 0$$

Torej $x = 2y$ ali $x = -y/2$. Obe možnosti vstavimo v vez in dobimo kritične točke

$$(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),\ (-1,2),\ (1,-2).$$

V prvih dveh točkah je vrednost funkcije f enaka 50 (min), v drugih dveh 75 (max).

3. Naj bo $A > 0$. Funkcija $f_A(x)$ je dana s predpisom

$$f_A(x) = \frac{A}{3x} + \ln x.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije $f_A(x)$, intervale naraščanja/padanja, intervale konveksnosti/konkavnosti, lokalne ekstreme in njihovo klasifikacijo, prevoje ter vse (smiselne) enostranske limite funkcije v vseh robnih točkah definicijskega območja.

(b) Skiciraj grafa funkcij $f_A(x)$ za vrednosti $A = 1$ ter $A = 3$.

Pomoč:

$$\ln 2 \approx 0.7, \qquad \ln 3 \approx 1.1$$

(c) Določi število ničel funkcije $f_A(x)$ v odvisnosti od parametra $A > 0$. Odgovor utemelji.

Rešitev: (a) Definicijsko območje: $(0, \infty)$

$f'(x) = \frac{3x-A}{3x^2}$

$f''(x) = \frac{2A-3x}{3x^3}$

$f' > 0 : (A/3, \infty) \quad f' < 0 : (0, A/3)$

$f'' > 0 : (0, 2A/3) \quad f'' < 0 : (2A/3, \infty)$

Kritična točka: $x = A/3$ (lok.min. ker $f''(A/3) = A/(3(A/3)^3) > 0$)

Prevoj: $x = 2A/3$

Limite na robovih: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ter

$$\lim_{x\searrow 0}(A/(3x) + \ln x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x}(A/3 + x \ln x) = (\ldots)$$

Ker je

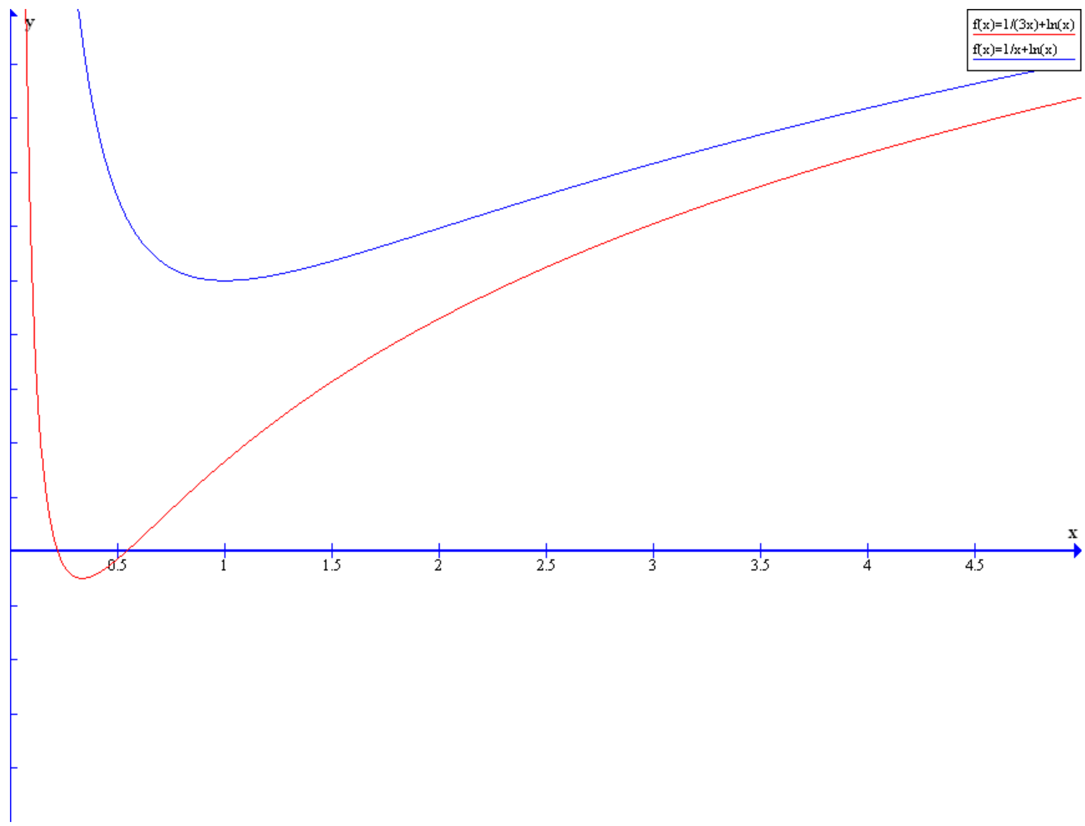
$$\lim_{x\searrow 0} x \ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = (L'Hosp) =$$

$$= \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\searrow 0}(-x) = 0$$

mora prejšnja limita biti

$$(\ldots) = \lim_{x\searrow 0} \frac{A}{3x} = +\infty.$$

(c) Ker gre funkcija na robovih def.obm. $(0, \infty)$ proti $+\infty$ in ima en sam lokalni minimum v točki $x = A/3$, kjer je vrednost funkcije $f(A/3) = 1 + \ln(A/3)$, vidimo, da graf funkcije prečka x os dvakrat (tj. ima dve ničli), le če je $1 + \ln(A/3) < 0 \Rightarrow A < 3/e$; če je $A = 3/e$ se graf dotika x osi (tj. ima eno ničlo); če pa je $A > 3/e$, funkcija nima ničel.


y
x
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
f(x)=1/(3x)+ln(x)
f(x)=1/x+ln(x)

4. Določi limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{(e^x - e^{-x})\sin x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \right).$$

Rešitev: Prva limita je rešljiva npr. z L'Hospitalom, rezultat je $1/2$. Druga limita je

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{(1+\frac{2}{n}) - (1+\frac{1}{n})} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(2 - \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \sqrt{1+\frac{2}{n}} \right) + \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{1-(1+\frac{2}{n})}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \lim_{n\to\infty} n \frac{1-(1+\frac{1}{n})}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -3/2.$$

5. (a) Zapiši definicijo parcialnih odvodov $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

(b) Podaj primer na okolici $(0,0)$ definirane $f(x,y)$, za katero odvod $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ obstaja, medtem ko $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ne obstaja.

(c) Naj bo $f(x,y)$ zvezno odvedljiva na okolici $(0,0)$ in velja

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0.$$

V katerih kvadrantih koordinatnega sistema se nahaja del implicitno podane krivulje $f(x,y) = 0$ v okolici koordinatnega izhodišča ? Odgovor utemelji.

Rešitev: (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

(b) $f(x, y) = |y|$

(c) Linearna/tangentna aproksimacija okrog točke $(0, 0)$ pove

$$f(x, y) \approx x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0).$$

Torej je enačba naše krivulje $(f = 0)$ približno

$$x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0) = 0 \Rightarrow y = -x f_x(0, 0)/f_y(0, 0).$$

Ker sta oba parcialna odvoda pozitivna, je naklonski koeficient te premice negativen, torej gre premica (in potem tudi krivulja v okolici $(0, 0)$) skozi drugi in četrti kvadrant.