Ime in priimek:________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Predavalnica:____ Vrsta:____ Sedež:____

1:____ 2:____ 3:____ 4:____ 5:____ Skupaj:______

Prvi izpit - ANA1(FM)
3.2.2010

1. Določi limiti

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right), \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Rešitev:
(a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\right)^{\sqrt{n}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+1-\sqrt{n}\right)}=e^{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=$$

$$=e^{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=e^{1+0}=e$$

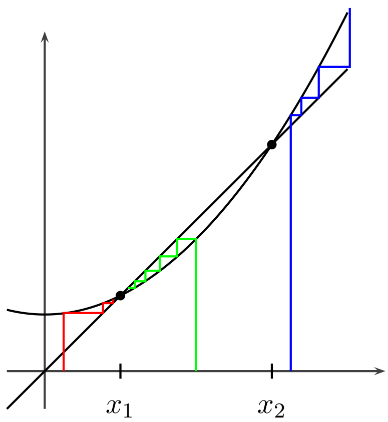
2. Zaporedje $(a_n)_n$ je podano s predpisom

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b}{4}, \quad a_0 = a.$$

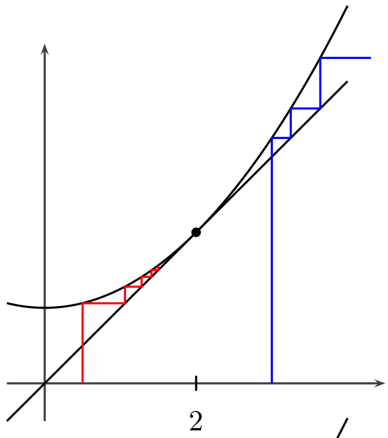
V odvisnosti od parametra $b > 0$ grafično obravnavaj, za katere $a > 0$ je zaporedje $(a_n)_n$ naraščajoče, padajoče, konvergentno. V primerih, ko je zaporedje konvergentno, določi tudi njegovo limito.

Rešitev: Izračunamo presečišča krivulj $y = x$ in $y = \frac{x^2+b}{4}$. To so rešitve enačbe $x^2 - 4x + b = 0$, torej $x = 2 \pm \sqrt{4-b}$. Ločimo tri možnosti:

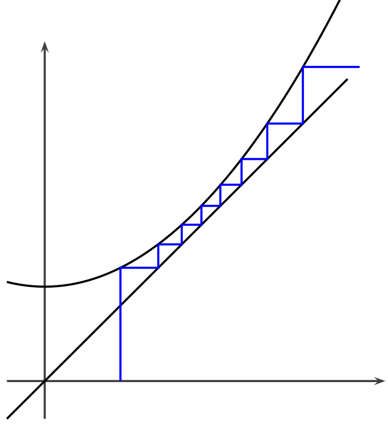
(i) Če je $0 < b < 4$, se krivulji sekata pri $x_1 = 2 - \sqrt{4-b}$ in $x_2 = 2 + \sqrt{4-b}$. V tem primeru z grafa preberemo, da zaporedje za $a \in (0, x_1)$ narašča in konvergira k x_1, za $a \in (x_1, x_2)$ pada in konvergira k x_1, za $a \in (x_2, \infty)$ narašča čez vse meje. V primeru $a = x_1$ ali $a = x_2$ je zaporedje konstantno.



(ii) Če je $b = 4$, se krivulji dotikata pri $x = 2$. V tem primeru z grafa preberemo, da zaporedje za $a \in (0, 2)$ narašča in konvergira k 2, za $a \in (2, \infty)$ narašča čez vse meje. V primeru $a = 2$ je zaporedje konstantno.

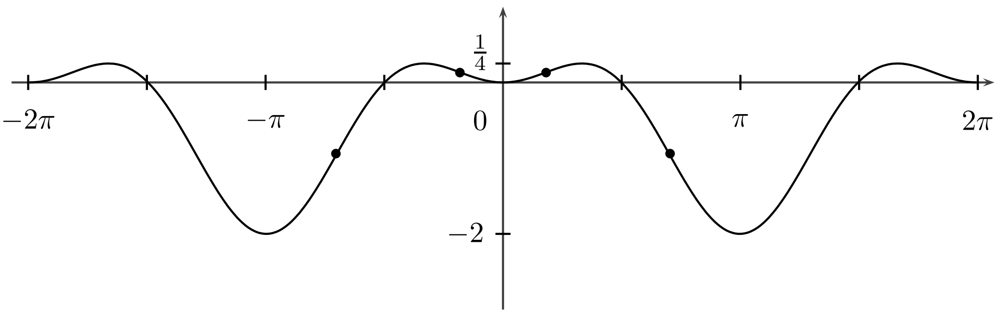


(iii) Če je $b > 4$, se krivulji ne sekata. V tem primeru z grafa preberemo, da zaporedje za $a \in (0, \infty)$ narašča čez vse meje.



3. Dana je funkcija
$$f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1.$$
Določi ničle, poišči in klasificiraj lokalne ekstreme, določi intervale naraščanja in padanja ter skiciraj graf funkcije f na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$. S pomočjo grafa ugotovi najmanj koliko prevojev ima funkcija f na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev:
Funkcija: $f(x) = \cos x(1 - \cos x)$
Prvi odvod: $f'(x) = \sin x(2\cos x - 1)$
Drugi odvod: $f''(x) = 2\cos(2x) - \cos x$
Ničle: $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ in $x_l = 2l\pi$
Lokalni ekstremi: $x_m = m\pi$ (lok. minimumi), $x_n = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ (lok. maksimumi)
Intervali naraščanja ($f' > 0$): $(-\pi + 2a\pi, -\frac{\pi}{3} + 2a\pi)$ in $(2b\pi, \frac{\pi}{3} + 2b\pi)$
Intervali padanja ($f' < 0$): $(-\frac{\pi}{3} + 2c\pi, 2c\pi)$ in $(\frac{\pi}{3} + 2d\pi, \pi + 2d\pi)$
Iz grafa vidimo, da ima funkcija na f intervalu $[-\pi, \pi]$ vsaj štiri prevoje (kot je označeno na grafu).



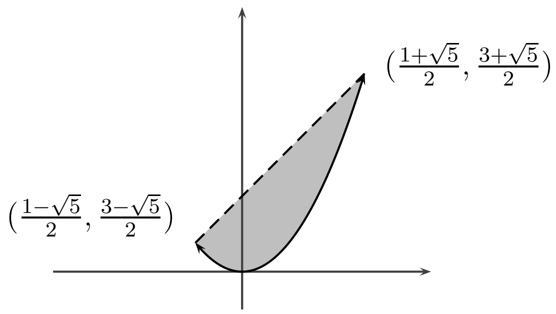
4. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y)=\sqrt{y-x^2}+\ln(x-y+1).$$

(a) Določi in nariši definicijsko območje funkcije f.
(b) Določi in klasificiraj stacionarne točke funkcije f.
(c) Določi globalne ekstreme funkcije f.
Pomoč: $\ln\frac{5}{4}\approx 0.22$

Rešitev: (a) Definicijsko območje funkcije f je množica

$$\mathcal{D}_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y\geq x^2\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y<x+1\}.$$



(b) Stacionarne točke so rešitve sistema

$$0=f_x(x,y)=\frac{-2x}{2\sqrt{y-x^2}}+\frac{1}{x-y+1}$$

$$0=f_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}+\frac{-1}{x-y+1}.$$

Če enačbi seštejemo, dobimo $\frac{1-2x}{2\sqrt{y-x^2}}=0$, torej $x=\frac{1}{2}$. To vstavimo v drugo enačbo in nekoliko preuredimo, da dobimo $2\sqrt{y-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}-y$. Če kvadriramo in nekoliko preuredimo, dobimo $y^2-7y+\frac{13}{4}$. Rešitvi te enačbe sta $y=\frac{1}{2}$ in $y=\frac{13}{2}$. Točka $(\frac{1}{2},\frac{13}{2})$ ne leži v definicijskem območju, zato je $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ edina stacionarna točka. Poračunamo druge odvode

$$f_{xx}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{(y-x^2)^3}}-\frac{1}{(x-y+1)^2}\qquad A=f_{xx}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=-5$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{x}{2\sqrt{(y-x^2)^3}}+\frac{1}{(x-y+1)^2}\qquad B=f_{xy}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=3$$

$$f_{yy}(x,y)=-\frac{1}{4\sqrt{(y-x^2)^3}}-\frac{1}{(x-y+1)^2}\qquad C=f_{yy}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=-3.$$

Ker velja $AC-B^2=6>0$, je v točki $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ lokalni ekstrem in sicer lokalni maksimum, saj velja $A<0$.

(c) Obravnavati moramo še rob območja. Iskanje vezanih ekstremov na krivulji $y=x^2$ prevedemo na iskanje ekstremov funkcije $g(x)=f(x,x^2)=\ln(x-x^2+1)$.

Velja $g'(x) = \frac{1-2x}{x-x^2+1}$, torej je kandidat za ekstrem pri $x = \frac{1}{2}$, to je točka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Ko gre (x, y) (po definicijskem območju) proti premici $y = x+1$, ostane izraz $\sqrt{y - x^2}$ omejen, izraz $\ln(x-y+1)$ pa gre proti $-\infty$. Torej je funkcija f navzdol neomejena, navzgor pa omejena. Zato globalni minimum funkcije f ne obstaja, kandidata za globalni maksimum pa sta točki $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Ker velja $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ in $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \ln\frac{5}{4} \approx 0.22$, je točka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ globalni maksimum funkcije f.

5. Naj bo $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ taka odvedljiva funkcija, da je f' omejena funkcija. Definiramo zaporedje $(a_n)_n$ s predpisom $a_n = f(\frac{1}{n})$. Dokaži, da ima zaporedje $(a_n)_n$ vsaj eno stekališče.
Nasvet: S pomočjo Lagrangeovega izreka oceni $|a_n - a_1|$.

Rešitev: Ker je funkcija f' omejena, obstaja konstanta M, da velja $|f'(x)| < M$ za vse $x \in (0, \infty)$. Po Lagrangeovem izreku obstaja $t \in (\frac{1}{n}, 1)$, da velja

$$f(\tfrac{1}{n}) - f(1) = f'(t)(\tfrac{1}{n} - 1).$$

Tako imamo

$$|a_n - a_1| = |f(\tfrac{1}{n}) - f(1)| = |f'(t)||\tfrac{1}{n} - 1| = |f'(t)|(1 - \tfrac{1}{n}) \leq |f'(t)| < M.$$

To pomeni, da so vsi členi zaporedja $(a_n)_n$ od člena a_1 oddaljeni manj kot M (ležijo v krogli $K(a_1, M)$), torej je zaporedje $(a_n)_n$ omejeno. Od tod pa po izreku sledi, da ima zaporedje $(a_n)_n$ res vsaj eno stekališče.