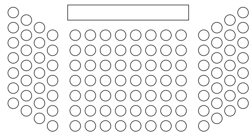
Analiza 1 (F): 1. izpit

4.2.2013

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti.
Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

(a) Ugotovi, ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n}{n^2+1}\right)^{3n^2-n}.$$

Rešitev. Ker je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n^2+1}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n^2+1}\right)^{\left(-\frac{n^2+1}{n}\right)\left(-\frac{n}{n^2+1}\right)(3n-1)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{3n^2-n}{n^2+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}} = e^{-3} < 1,$$

po korenskem kriteriju vrsta konvergira.

(b) Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x^2)}{\operatorname{arctg} x - x}.$$

Rešitev. Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x^2)}{\operatorname{arctg} x - x} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+x\cdot\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)+2x^2}{-x^2} \overset{L.P.}{=}$$

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x^2)+(1+x^2)\frac{2x}{1+x^2}+4x}{-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x^2)+6x}{-2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x^2)+6}{-2} = -3.$$

2. naloga (25 točk)

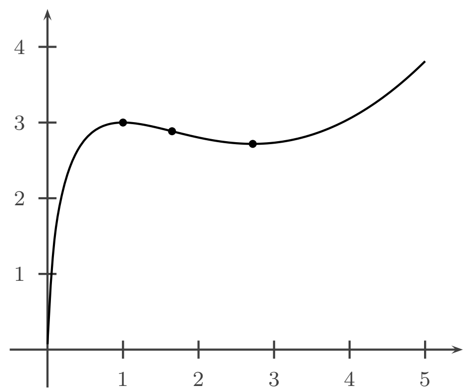
Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = x(\ln^2 x - 3\ln x + 3).$$

Določi definicijsko območje, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti, limite na robu definicijskega območja, ter skiciraj graf.

Rešitev.
$D_f = (0, \infty)$
$f'(x) = \ln x(\ln x - 1)$
v točki $x = 1$ je lokalni maksimum, v točki $x = e$ je lokalni minimum
intervali naraščanja: $(0, 1)$ in (e, ∞)
intervali padanja: $(1, e)$
$f''(x) = \frac{1}{x}(2\ln x - 1)$
v točki $x = \sqrt{e}$ je prevoj
intervali konveksnosti: $(\sqrt{e}, \infty)$
intervali konkavnosti: $(0, \sqrt{e})$
$\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln^2 x - 3\ln x + 3) = \infty$

$$\lim_{x\to 0} x(\ln^2 x - 3\ln x + 3) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x - 3\ln x + 3}{\frac{1}{x}} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x - 3}{-\frac{1}{x}} \overset{L.P.}{=}$$
$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$



3. naloga (25 točk)

Določi definicijsko območje ter poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sin y - \ln x.$$

Rešitev. $D_f = \{(x,y); x > 0\}$

$$\begin{aligned} f_x &= x\sin y - \frac{1}{x} = 0 \\ f_y &= \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\cos y = 0 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi $\frac{x^2}{2} - 1 = 0$ ali $\cos y = 0$. Če je $\frac{x^2}{2} - 1 = 0$, je $x^2 = 2$ in ker mora biti $x > 0$, je $x = \sqrt{2}$. Ko slednje vstavimo v prvo enačbo, dobimo $\sin y = \frac{1}{2}$, torej je $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ali $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Če pa je $\cos y = 0$, je $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ali $y = -\frac{\pi}{2}$. V prvem primeru je $\sin y = 1$ in iz prve enačbe dobimo $x^2 = 1$ oziroma $x = 1$. V drugem primeru je $\sin y = -1$ in iz prve enačbe dobimo $x^2 = -1$, ki pa nima rešitev. Stacionarne točke so torej $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$ in $(1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$.

$$\begin{aligned} A &= f_{xx} = \sin y + \frac{1}{x^2} \\ B &= f_{xy} = x\cos y \\ C &= f_{yy} = -\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sin y \\ D &= AC - B^2 \end{aligned}$$

Od tod poračunamo

točka	A	B	C	D	klasifikacija
$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$	1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	ni ekstrema
$(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$	1	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	ni ekstrema
$(1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$	2	0	$\frac{1}{2}$	1	minimum

4. naloga (25 točk)

Zaporedje $(a_n)_n$ je podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{a_n^2 + 10a_n - 3} + 1$$

in začetnim členom $a_1 = 2$. Dokaži, da je zaporedje navzgor omejeno in naraščajoče ter izračunaj njegovo limito.

Rešitev. Kandidate za limito izračunamo iz enačbe

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 10a - 3} + 1.$$

Za kandidate dobimo $a = 3$ in $a = \frac{1}{2}$.

Z indukcijo pokažemo, da je zaporedje navzgor omejeno s 3, torej $a_n \leq 3$ za vsa naravna števila n.

$$\begin{aligned} n = 1 &\quad : \quad a_1 = 2 \leq 3 \\ \text{I.P.} &\quad : \quad a_n \leq 3 \text{ za nek } n \\ n \to n+1 &\quad : \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{3}\sqrt{a_n^2 + 10a_n - 3} + 1 \overset{I.P.}{\leq} \tfrac{1}{3}\sqrt{9 + 30 - 3} + 1 = 3 \end{aligned}$$

Pokažemo še, da je zaporedje naraščajoče, torej $a_{n+1} \geq a_n$ za vsa naravna števila n.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_n \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{a_n^2 + 10a_n - 3} + 1 &\geq a_n \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{a_n^2 + 10a_n - 3} &\geq 3(a_n - 1) \end{aligned}$$

Iz rekurzivne zveze zaporedja očitno sledi $a_n \geq 1$ za vse $n \geq 2$ in to velja tudi za a_1. Torej sta obe strani neenakosti pozitivni, zato lahko neenakost kvadriramo, da dobimo

$$\begin{aligned} a_n^2 + 10a_n - 3 &\geq 9(a_n - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad a_n^2 + 10a_n - 3 &\geq 9a_n^2 - 18a_n + 9 \\ \Leftrightarrow \quad 8a_n^2 - 28a_n + 12 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad 8(a_n - \frac{1}{2})(a_n - 3) &\leq 0 \end{aligned}$$

Ker smo zgoraj že dokazali, da je $1 \leq a_n \leq 3$, je prvi faktor pozitiven, drugi pa negativen. Ta neenakost je torej izpolnjena in zato je zaporedje naraščajoče. Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Limita je 3, saj so vsi členi večji od $\frac{1}{2}$ in zaporedje je naraščajoče.