Prvi izpit iz Analize 1

18. januar 2008

1. Zaporedje $(a_n)_n$ je podano z začetnim členom $a_1 = 2$ in rekurzivno zvezo

$$x_{n+1} = \frac{2}{1 + x_n}.$$

(a) Pokaži, da podzaporedje členov s sodimi indeksi $(a_{2k})_k$ narašča in je navzgor omejeno.

(b) Pokaži, da podzaporedje členov z lihimi indeksi $(a_{2k-1})_k$ pada in je navzdol omejeno.

(c) Ali je zaporedje $(a_n)_n$ konvergentno? Če je, izračunaj njegovo limito.

1'. Pokaži, da je zaporedje $(a_n)_n$, podano z začetnim členom $a_1 = 2$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 4),$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

2. Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter čim bolj natančno nariši graf funkcije

$$y = \sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}.$$

2'. Enaka naloga za funkcijo

$$y = \arcsin \tfrac{1}{1+x^2}.$$

3. Poišči stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

in ugotovi njihov tip.

4. Katere točke na krivulji

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$$

so najmanj in najbolj oddaljene od izhodišča $(0, 0)$?