Tretji izpit - ANA1(F)

2.6.2010

1. a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)\sin x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{4x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(1-\cos x)\sin x}{8x} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+4}-n^2}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+4}-n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{4}{n^2-1}\frac{\sqrt{n^4+4}+n^2}{4}} = e^2\end{aligned}$$

2. Podana je funkcija

$$f(x,y) = \ln xy + \sqrt{3-x^2-y^2}.$$

Določi njeno definicijsko območje. Obravnavaj globalne ekstreme.
Rešitev:

$$Df = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ (x,y>0\ \vee\ x,y<0)\wedge(x^2+y^2\leq 2)\Big\}$$

Najprej poiščemo možne lokalne ekstreme z rešitvijo sistema $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$. Dobimo točki $T_{1,2}(\pm 1,\pm 1)$, kjer je vrednost funkcije $f(\pm 1,\pm 1) = 1$.
Nato obravnavamo še vrednosti funkcije na robu definicijskega območja. Funkcijo lahko na delu krožnice $x^2+y^2=3$, ki leži v definicijskem območju (za x,y>0), opišemo z eno samo spremenljivko

$$f(x,\sqrt{3-x^2}) = \ln x(3-x^2),\quad x\in\Big(0,\sqrt{3}\Big)\,.$$

Omenjena funkcija doseže lokalni ekstrem v točki $T_3(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$, kjer je vrednost funkcije $f(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}) = \ln\frac{3}{2}$. Zaradi simetričnosti je kandidat za ekstreme tudi točka nasprotna tej.
Ker se vrednost funckije približuje $-\infty$, ko gremo z x ali z y proti vrednosti 0, je v točkah $T_{1,2}$ globalni maksimum, globalni minimum pa ne obstaja.
Opomba: Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo vezanih ekstremov.

3. Zaporedje je podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n.$$

a) Za začetne člene $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ in $a_2 = -4$ določi splošni člen zaporedja.

b) Denimo, da velja $a_2 = 4a_0$. Poišči vse vrednosti člena a_1 za katere bo število 0 stekališče zaporedja.

Rešitev:
Z nastavkom $a_n = \lambda^n$ poiščemo karakteristično enačbo in njene ničle

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2) = 0.$$

Tako dobimo splošno rešitev izraženo z naznanimi koeficienti

$$a_n = A2^n + Bn2^n + C(-2)^n.$$

Rešimo sistem

$$a_0 = A + C = 1$$

$$a_1 = 2A + 2B - 2C = 0$$

$$a_2 = 4A + 8B + 4C = -4$$

in dobimo $A = 1, B = -1, C = 0$. Zato je splošni člen zaporedja iz točke a) enak

$$a_n = (1 - n)2^n.$$

Iz zveze

$$4a_0 = 4(A + C) = 4A + 8B + 4C = a_2$$

ugotovimo, da je $B = 0$. Torej je splošni člen zaporedja iz točke b), izražen z dvema neznanima konstantama, enak

$$a_2 = A2^n + C(-2)^n = (A + (-1)^n C)2^n.$$

Opazimo, da bo število 0 stekališče zaporedja a_n natanko tedaj, ko je $A = C$ oziroma natanko tedaj, ko je

$$a_1 = 2A - 2C = 0.$$

4. Določi in klasificiraj lokalne ekstreme implicitno podane funkcije $z = z(x, y)$

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz + 7 = 0.$$

Rešitev:
Enačbo najprej implicitno odvajamo po obeh spremenljivkah

$$4x + 2zz_x - 8z - 8xz_x = 0, \quad 4y + 2zz_y - 8xz_y = 0.$$

Ker iščemo točke, kjer je $z_x = z_y = 0$, dobimo zvezi

$$4x - 8z = 0, \quad 4y = 0.$$

Ob upoštevanju osnovne implicitne enačbe sta s tem podani dve točki $T_{1,2}(\pm 2, 0)$ z vrednostjo $z_{1,2} = \pm 1$.
Sedaj izračunamo še zveze med drugimi odvodi

$$4 + 2z_x^2 + 2zz_{xx} - 8z_x - 8z_x - 8xz_{xx} = 0,$$

$$2z_y z_x + 2zz_{xy} - 8z_y - 8xz_{xy} = 0,$$
$$4 + 2z_y^2 + 2zz_{yy} - 8xz_{yy} = 0.$$

Vstavimo $x = \pm 2, y = z_x = z_y = 0, z = \pm 1$ in dobimo

$$z_{xx} = \pm\frac{2}{7}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = \pm\frac{2}{7}.$$

Z uporabo kriterijev za klasifikacijo ugotovimo, da je v točki T_1 lokalni minimum, v točki T_2 pa lokalni maksimum.

5. Podana je funkcija
$$f(x) = 1 - 2xe^{-\frac{2}{x}}$$

   a) Pokaži, da ima funkcija f ničlo na intervalu $[1, 2]$.

   b) Določi definicijsko območje, limite v robovih definicijskega območja in stacionarne točke, ter nariši graf funkcije f.

Rešitev:
Ker je
$$f(1) = 1 - 2e^{-2} > 0 \text{ in } f(2) = 1 - 4e^{-1} < 0,$$
ima funkcija f zaradi zveznostu na intervalu $[1, 2]$ vsaj eno nično (izrek o zveznih funkcijah).
Funckija je definirana na $\mathbb{R} - 0$. Tri limite v robovih definicijskega območja izračunamo direktno

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty, \lim_{x\searrow 0} f(x) = 1,$$

pri eni pa uporabimo L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = 1 - 2\lim_{x\nearrow 0}\frac{e^{-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + 4\lim_{x\nearrow 0} e^{-\frac{2}{x}} = \infty.$$

Stacionarna točka je $S(-2, 1+4e)$.