

ANALIZA 1 (fin) - 2. pisni izpit

11. 3. 2009

Ime in priimek:

Vpisna št.:

1. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \operatorname{arctg} \ln x.$$

Določi definicijsko območje funkcije $f(x)$, njene ničle, intervale naraščanja/padanja, intervale konveksnosti/konkavnosti, lokalne ekstreme, prevoje, izračunaj vse (smiselne) enostranske limite funkcije v vseh robnih točkah definicijskega območja ter skiciraj njen graf.

2. Zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima začetni člen $x_1 = 10$ ter zadošča rekurzijski zvezi

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

kjer smo označili $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

- (a) Pokaži, da ima f minimum na \mathbb{R} in ga izračunaj.
- (b) Dokaži, da je zaporedje $(x_n)_n$ spodaj omejeno.
- (c) Dokaži, da je zaporedje $(x_n)_n$ padajoče.
- (d) Dokaži, da je zaporedje $(x_n)_n$ konvergentno in izračunaj njegovo limito.

3. Dan je funkcijski predpis

$$f(x, y) = \ln(1 + y - x^2) + \ln(1 - x^2 - y).$$

(a) Določi in skiciraj definijsko območje funkcije f (označimo ga z \mathcal{D}_f), poišči njene kritične točke in jih klasificiraj.

(b) Poišči tudi maksimum in minimum funkcije $f(x, y)$ na območju \mathcal{D}_f .

Pomoč: Kaj se dogaja z vrednostjo funkcije $f(x, y)$, ko gre (x, y) proti robu območja \mathcal{D}_f ?

4. Določi limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(2^{2x-1} + \frac{1}{2^{x+1}} \right)}{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^{\sqrt{n}}.$$

5. (a) Zapiši definicijo stekališča zaporedja.

(b) Za vsako od naslednjih izjav ugotovi, če je resnična ali ne; če je, utemelji zakaj, če ni, podaj protiprimer.

- vsako zaporedje z enim stekališčem je omejeno
- vsako zaporedje brez stekališč je konvergentno
- vsako zaporedje brez stekališč ni omejeno