Ime in priimek:_____ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Predavalnica:_____ Vrsta:_____ Sedež:_____

1:_____ 2:_____ 3:_____ 4:_____ 5:_____ Skupaj:_____

Drugi izpit - ANA1(FM)
23.3.2010

1. Določi limiti

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x^2-1}{\cos^2 x + x\sin 2x - x^2 - 1}, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}\Big(\ln(n+\sqrt{n}+1)-\ln(n)\Big).$$

Rešitev:
(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x^2-1}{\cos^2 x + x\sin 2x - x^2 - 1} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-2x}{-2\cos x\sin x + \sin 2x + 2x\cos 2x - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos 2x - 1} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-2\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}}{-\sin 2x} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{-2\cos 2x} = -\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}\Big(\ln(n+\sqrt{n}+1)-\ln(n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n}\right)^{\sqrt{2n+1}} =$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{n}+1}{n}\right)^{\sqrt{2n+1}}\right) = \ln\left(e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}(\sqrt{n}+1)}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{2}$$

2. Zaporedje $(a_n)_n$ je podano s predpisom

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}, \quad a_1 = \frac{1}{2}.$$

(a) Z indukcijo pokaži, da je zaporedje $(a_n)_n$ navzgor omejeno z 1.
(b) Pokaži, da je zaporedje $(a_n)_n$ naraščajoče.
(c) Utemelji, da je zaporedje $(a_n)_n$ konvergentno, in določi njegovo limito.

Rešitev:
(a) Pokazati moramo $a_n \leq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

$n = 1$ $\quad a_1 = \frac{1}{2} \leq 1$

$I.P.$ $\quad a_n \leq 1$

$n + 1$ Preveriti moramo, da velja $a_{n+1} \leq 1$, torej $\frac{2a_n}{a_n+1} \leq 1$. Ker so vsi členi zaporedja očitno pozitivni, je zadnja neenakost ekvivalentna $2a_n \leq a_n + 1$ oziroma $a_n \leq 1$. Slednje pa je res po indukcijski predpostavki.

(b) Pokazati moramo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$, oziroma $a_n \leq \frac{2a_n}{a_n+1}$. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, je zadnja neenakost ekvivalentna $a_n + 1 \leq 2$ oziroma $a_n \leq 1$. Slednje pa je res zaradi točke (a).

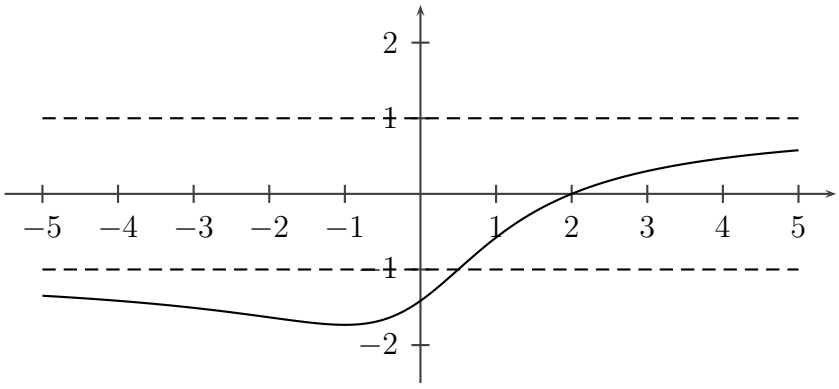
(c) Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je po izreku konvergentno. Kandidati za limito so rešitve enačbe $x = \frac{2x}{x+1}$. Ta enačba ima dve rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Ker pa je zaporedje naraščajoče, so vsi njegovi členi večji ali enaki $a_1 = \frac{1}{2}$, torej število 0 ne more biti limita tega zaporedja. Zato je limita zaporedja število 1.

3. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Določi definicijsko območje, ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti, limiti v neskončnosti ter skiciraj graf funkcije f.

Rešitev:
Definicijsko območje: $\mathbb{R}$
Ničle: $x = 2$
Prvi odvod: $f'(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$
Lokalni ekstremi: $x = -1$ (lok. minimum)
Intervali naraščanja ($f' > 0$): $(-1, \infty)$
Intervali padanja ($f' < 0$): $(-\infty, -1)$
Drugi odvod: $f''(x) = \dfrac{-4x^2-6x+4}{\sqrt{(x^2+2)^5}}$
Prevoji: $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$
Intervali konveksnosti ($f'' > 0$): $(-2, \frac{1}{2})$
Intervali konkavnosti ($f'' < 0$): $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$
Limiti v neskončnosti: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$



4. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = xe^y - \ln(xy).$$

Določi definicijsko območje funkcije f ter poišči in klasificiraj njene stacionarne točke. Ali je funkcija f navzgor oziroma navzdol omejena? Odgovor utemelji.

Rešitev:
Definicij območje funkcije f je množica

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < 0, y < 0\},$$

torej prvi in tretji kvadrant brez koordinatnih osi. Stacionarne točke so rešitve sistema

$$0 = f_x(x,y) = e^y - \frac{1}{x}$$
$$0 = f_y(x,y) = xe^y - \frac{1}{y}.$$

Ta sistem rešimo na primer na naslednji način. Prvo enačbo pomnožimo z x in odštejemo od druge, da dobimo $1 - \frac{1}{y} = 0$, torej $y = 1$. To sedaj vstavimo v prvo enačbo, da dobimo $e - \frac{1}{x} = 0$ oziroma $x = \frac{1}{e}$. Edina stacionarna točka je torej $(\frac{1}{e}, 1)$. Za klasifikacijo poračunamo druge odvode v tej točki. Velja

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{x^2} \quad f_{xy}(x,y) = e^y \quad f_{yy}(x,y) = xe^y + \frac{1}{y^2}$$

torej $A = f_{xx}(\frac{1}{e}, 1) = e^2$, $B = f_{xy}(\frac{1}{e}, 1) = e$, $C = f_{yy}(\frac{1}{e}, 1) = 2$. Ker velja $AC - B^2 = e^2 > 0$, je v točki $(\frac{1}{e}, 1)$ lokalni ekstrem in sicer lokalni minimum, saj velja $A > 0$. Oglejmo si vrednosti funkcije na krivulji $y = \frac{1}{x}$ (ta krivulja cela leži znotraj definicijskega območja), torej $f(x, \frac{1}{x}) = xe^{\frac{1}{x}}$. Velja

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty,$$

to pa pomeni, da je funkcija f navzgor in navzdol neomejena.

5. Funkcija $z(x,y)$ je v okolici točke $(1,2)$ podana implicitno s predpisom

$$xz^3 - yz^2 + 2xy - 5x + 2 = 0$$

in zavzame vrednost $z(1,2) = 1$.
(a) Preveri, da enačba v okolici točke $(1,2,1)$ res določa neko funkcijo $z(x,y)$.
(b) Določi Taylorjev polinom drugega reda v točki $(1,2)$ za funkcijo z in čim bolj natančno izračunaj vrednost $z(1.2, 1.9)$.

Rešitev:
(a) Naj bo $F(x,y,z) = xz^3 - yz^2 + 2xy - 5x + 2$. Preveriti moramo, da enačba $F(x,y,z) = 0$ v točki $(1,2,1)$ ustreza predpostavkam izreka o implicitni funkciji, torej, da velja $F(1,2,1) = 0$ in $F_z(1,2,1) \neq 0$. Prvi pogoj je izpolnjen, za drugega pa poračunamo $F_z(x,y,z) = 3xz^2 - 2yz$, torej $F_z(1,2,1) = -1 \neq 0$.

(b) Najprej izračunajmo vse odvode do drugega reda. Če enačbo parcialno odvajamo po x oziroma y dobimo

$$z^3 + 3xz^2 z_x - 2yzz_x + 2y - 5 = 0, \qquad 3xz^2 z_y - z^2 - 2yzz_y + 2x = 0.$$

Od tod lahko izrazimo

$$z_x = \frac{-z^3 - 2y + 5}{3xz^2 - 2yz}, \qquad z_y = \frac{z^2 - 2x}{3xz^2 - 2yz}.$$

Poračunamo še

$$z_{xx} = \frac{-3z^2 z_x(3xz^2 - 2yz) - (3z^2 + 6xzz_x - 2yz_x)(-z^3 - 2y + 5)}{(3xz^2 - 2yz)^2},$$

$$z_{xy} = \frac{(-3z^2 z_y - 2)(3xz^2 - 2yz) - (6xzz_y - 2z - 2yz_y)(-z^3 - 2y + 5)}{(3xz^2 - 2yz)^2},$$

$$z_{yy} = \frac{2zz_y(3xz^2 - 2yz) - (6xzz_y - 2z - 2yz_y)(z^2 - 2x)}{(3xz^2 - 2yz)^2}.$$

Z upoštevanjem $z(1,2) = 1$ dobimo

$$z_x(1,2) = 0, \quad z_y(1,2) = 1, \quad z_{xx}(1,2) = 0, \quad z_{xy}(1,2) = 5, \quad z_{yy}(1,2) = -2.$$

Taylorjev polinom druge stopnje v točki $(1,2)$ za funkcijo z je enak

$$\begin{aligned} T_{2,(1,2)}(h_1,h_2) &= z(1,2) + z_x(1,2)h_1 + z_y(1,2)h_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}z_{xx}(1,2)h_1^2 + z_{xy}(1,2)h_1h_2 + \frac{1}{2}z_{yy}(1,2)h_2^2 = \\ &= 1 + h_2 + 5h_1h_2 - h_2^2. \end{aligned}$$

S pomočjo tega lahko približno izračunamo

$$z(1.2, 1.9) \approx T_{2,(1,2)}(0.2, -0.1) = 0.79.$$