

ANALIZA 1 (fin, išrm) - pisni izpit

5. 9. 2008

1. Funkcija $f(x)$ je dana s predpisom

$$f(x) = \frac{x}{\ln x + 1}.$$

Določi definicijsko območje funkcije $f(x)$, intervale naraščanja/padanja, intervale konveksnosti/konkavnosti, lokalne ekstreme, prevoje in skiciraj njen graf. Izračunaj še vse (smiselne) enostranske limite funkcije v vseh robnih točkah definicijskega območja.

2. Za funkcijo dano s predpisom

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{x} + \sqrt{1 - y}$$

določi njeno definicijsko območje in na njem poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo funkcija zavzame.

3. Naj bo $x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \pi$. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je dano z začetnim členom $a_0 = 1$ in rekurzijsko zvezo

$$a_{n+1} = a_n \cos \frac{x}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Z matematično indukcijo dokaži, da velja

$$a_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (b) Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. Za vsako od naslednjih zaporedij določi vsa stekališča

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \quad a_n = \left(\frac{n + (-1)^n}{n + 2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \quad b_n = n\sqrt{n} \left(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$