

ANALIZA 1 (fin) - 1. kolokvij

28. 11. 2007

1. Določi limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 7x} \right)^x.$$

2. Dana je funkcija

$$f(x, y) = \ln \frac{y - x^2}{x - y^2}.$$

(a) Določi (in nariši) definicijsko območje za $f(x, y)$.

(b) Naj bo $\alpha > 0$. Če obstajata, določi limiti

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \alpha t), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

3. Zaporedje $(a_n)_n$ je dano z rekurzijskim predpisom

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}(a_n - 2a_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

in začetnima členoma

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 4\beta.$$

(a) Določi formulo za splošni člen a_n .

(b) Pri katerih vrednostih realnega parametra β zaporedje konvergira?

4. (a) Naj bo $x \in \mathbf{R}$. Z matematično indukcijo dokaži, da velja identiteta

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

za vse naravne n .

(b) Določi limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{3}{n^2} + \sin \frac{5}{n^2} + \dots + \sin \frac{2n-1}{n^2} \right).$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$