Prvi kolokvij - ANA1(F)
REŠITVE 26.11.2008

1. Grafično pokaži, da je zaporedje, podano s predpisom

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$$

in začetnim členom $a_1 = -\frac{1}{2}$, konvergentno, ter določi njegovo limito. Določi vse vrednosti začetnega člena a_1, za katere limita zaporedja ostane nespremenjena.

Rešitev:

Najprej izračunajmo kandidate za limito. To so seveda presečišča krivulj $y = x^2 + 2x$ in $y = x$, torej števili 0 in -1, saj velja

$$x^2 + 2x = x$$

$$x^2 + x = x(x+1) = 0.$$

Ker je $a_1 = -\frac{1}{2}$ je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, limita pa je -1. Velja pa tudi, da za vrednosti $a_1 \in (-2, 0)$ zaporedje prav tako konvergira k -1.

2. Izračunaj limiti funkcij:

a)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2+3x}{2-x}\right)^{\frac{2}{x-x^2}}$$

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{2+3x}{2-x}\right)^{\frac{2}{x-x^2}} &= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{4x}{2-x}\right)^{\frac{2}{x-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{4x}{2-x}\right)^{\frac{2-x}{4x}}\right)^{\frac{8x}{(2-x)(x-x^2)}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0} \frac{8}{(2-3x+x^2)}} = e^4
\end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^8+5x^4+2} - \sqrt{x^8+2}}{(1-\cos x)\tan^2 3x}$$

Rešitev:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^8+5x^4+2} - \sqrt{x^8+2}}{(1-\cos x)\tan^2 3x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{\sqrt{x^8+5x^4+2} + \sqrt{x^8+2}}{\sqrt{x^8+5x^4+2} + \sqrt{x^8+2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5x^4(1+\cos x)\cos^2 3x}{\sin^2 x \sin^2 3x(\sqrt{x^8+5x^4+2}+\sqrt{x^8+2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} 5 \; \frac{x^2}{\sin^2 x} \; \frac{(3x)^2}{9\sin^2 3x} \; \frac{1+\cos x}{\sqrt{x^8+5x^4+2}+\sqrt{x^8+2}} = \frac{5\cdot 2}{9\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{18}$$

3. Ali obstaja vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$, za katero bi bila funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\tan x}}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

zvezna na intervalu $[0, \pi]$.

Rešitev:

Funkcija f je kompozitum elementarnih funkcij, definiranih povsod na intervalu $[0, \pi]$, razen v točki $x = \frac{\pi}{2}$. Zato je na celem intervalu, razen v omenjeni točki, tudi zvezna. Torej nas zanima, ali obstaja tak $a \in \mathbb{R}$, da bo funkcija f zvezna v točki $x = \frac{\pi}{2}$. Oglejmo si levo in desno limito:

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^{\tan x}} = 0,$$

saj velja $\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ *in* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^{\tan x}} = 1,$$

saj velja $\lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ *in* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Torej ne obstaja vrednost parametra a, za katero bi bile leva limita, desna limita in vrednost funkcije f v točki $x = \frac{\pi}{2}$ enake. To pa je potreben pogoj za zveznost v točki $x = \frac{\pi}{2}$.

4. a) Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\frac{3}{2}\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n} \leq \sqrt{2n+1}.$$

Rešitev:

Neenakost bomo pokazali s pomočjo indukicje. Za $n = 1$ dobimo neenačbo $\frac{3}{2} \leq \sqrt{3}$, ki je seveda izpolnjena. Sedaj izvedimo indukcijski korak. Z uporabo indukcijske predpostavke dobimo.

$$\frac{3}{2}\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n}\frac{2(n+1)+1}{2(n+1)} \leq \sqrt{2n+1}\frac{2n+3}{2n+2}.$$

Dovolj je torej pokazati, da velja

$$\sqrt{2n+1} \; \frac{2n+3}{2n+2} \leq \sqrt{2n+3}.$$

Ta neenakost pa je ekvivalentno naslednjim neenakostim:

$$(2n+3)\sqrt{2n+1} \leq (2n+2)\sqrt{2n+3}$$
$$(2n+3)^2(2n+1) \leq (2n+2)^2(2n+3)$$
$$(2n+3)(2n+1) \leq (2n+2)^2$$
$$4n^2+8n+3 \leq 4n^2+8n+4$$
$$3 \leq 4.$$

Ker je slednja izpolnjena, so izpolnjene tudi vse prejšnje.

b) Izračunaj

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n+2}\right).$$

Rešitev:

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$0 \leq \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Druga neenakost sledi iz točke (a) te naloge. Ker je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{2}{n}} = 0,$$

je po izreku o sendviču tudi začetna limita enaka 0.

5. a) Zapiši definiciji stekališča in limite zaporedja.

b) Naj bo a_n konvergentno zaporedje in

$$A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ali obstajata $\sup A$ in $\inf A$? Navedi primer, ko $\max A$ ne obstaja.

Rešitev:

Število a je limita zaporedja a_n, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_0, da za vsak $n > n_0$ velja $|a - a_n| < \epsilon$ (Število a je limita zaporedja, če v poljubni njegovi okolici ležijo vsi členi zaporedja, razen končno mnogo).

Število a je stekališče zaporedja a_n, če za vsak $\epsilon > 0$ in vska $n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja $n > n_0$, da zanj velja $|a - a_n| < \epsilon$ (Število a je stekališče zaporedja, če v poljubni njegovi okolici leži neskončno členov zaporedja).

Če je zaporedje konvergentno, je tudi omejeno, zato $\sup A$ *in* $\inf A$ *vedno obstajata.*

Primer, ko $\max A$ *ne obstaja, je vsako monotono naraščujoče in navzgor omejeno zaporedje, naprimer $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.*