Prvi kolokvij - ANA1(F)

Rešitve

1. a) Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{n}{2}.$$

   b) Če obstajajo določi infimum, supremum, maksimum in minimum množice

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Najprej dokažimo točko a). Trditev bomo pokazali z indukcijo. Pri $n = 1$ dobimo neenakost $1 > 1/2$, ki seveda drži. Sedaj želimo videti, da ob indukcijski predpostavki velja:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} > \frac{n+1}{2}$$

Zaradi indukcijske predpostavke je dovolj videti, da velja

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} > \frac{n+1}{2}.$$

Neenakost pretvorimo v novo ekvivalentno neenačbo oblike:

$$n + 1 < 2^{n+1}.$$

Le ta je izpolnjena (smo povedali na vajah ali pa naredimo dokaz z indukcijo).
Pri drugi točki si pomagamo z rezultatom iz točke a). Neenakost nam pove, da množica A navzgor ni omejena in zatorej maksimum in supremum ne obstajata. Očitno pa je, da je minimum (in s tem tudi infimum) dosežen pri $n = 1$ in je enak 1.

2. Naj bo (a_n) zaporedje podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Kakšna zveza mora veljati za njegove začetne člene a_0, a_1 in a_2, da bo zaporedje omejeno? Določi začetne člene tako, da bo zaporedje omejeno in bo imelo za stekališči števili 1 in 3.

Z znanim postopkom izračunamo splošno obliko rekurzivnega zaporedja:

$$a_n = A2^n + B + C(-1)^n.$$

Če želimo, da je zaporedje omejeno, mora biti $A = 0$. Začetni pogoji nam podajajo sistem enačb

$$a_0 = A + B + C, \quad a_1 = 2A + B - C, \quad a_2 = 4A + B + C.$$

Od tod dobimo

$$A = \frac{a_2 - a_0}{3}.$$

Torej je zaporedje omejeno natanko tedaj, ko je $a_0 = a_2$. Če želimo, da sta stekališči 1 in 3 imamo dve možnosti. Bodisi sta $a_0 = a_2 = 3$ in $a_1 = 1$, bodisi sta $a_0 = a_2 = 1$ in $a_1 = 3$.

3. Reševanje prve limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - n + 1} \quad - \quad \sqrt{n^3 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - n + 1} + \sqrt{n^3 - 2n}} = 0.$$

Za rešitev druge limite lahko uporabimo dva načina

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} (1 + \cos x - 1)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\sin^2 x}{2x^2}} = e^{-1/2}$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} (1 - \sin^2 x)^{1/2x^2} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\sin^2 x}{2x^2}} = e^{-1/2}.$$

4. Podani sta funkciji

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}, \quad g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{1 + e^{1/\sin x}}\right)$$

   a) Utemelji, zakaj sta funkciji zvezni na množici $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.
   b) Pokaži, da nobene izmed funkcij ne moremo zvezno razširiti preko točke $x = 0$, vendar pa lahko to storimo za funkcijo $h(x) = f(x)g(x)$. Določi primeren $h(0)$.

a) Funkciji sta dobro definirani na celem intervalu razen v točki $x = 0$. Ker sta sestavljeni kot kompozitum, vsota, produkt in elementarnih funkcij, sta zvezni povsod, kjer sta definirani. *Sklep, da sta funkciji elementarni ni pravilen.* **b)** Velja:

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = 1 \quad \lim_{x\nearrow 0} g(x) = -1.$$

Zato ne moremo določiti $f(0)$ oziroma $g(0)$ tako da bi bila katera od funkcij zvezna. Vendar pa opazimo, da lahko izberemo

$$h(0) = \lim_{x\searrow 0} h(x) = \lim_{x\nearrow 0} h(x) = \frac{\pi}{2}$$

(upoštevamo, da je $h = f \cdot g$).

5. Podani sta zaporedji (a_n) in (b_n), za kateri velja $0 < a_n \leq \frac{1}{b_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

   a) Pokaži, da velja: če zaporedje (b_n) nima stekališča, je število 0 stekališče zaporedja (a_n).

   b) Pokaži, da obrat trditve iz točke a) ne velja, t.j. poišči zaporedje (a_n), ki ima za stekališče število 0, ter zaporedje (b_n) s stekališčem (zaporedji morata ustrezati tudi neenakosti v besedilu naloge).

   c) Denimo, da obstaja število

   $$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

   Pokaži, da je $L \in [0, 1]$.

a) Če zaporedje (b_n) nima stekališča, pomeni da mora biti neomejeno (izrek iz predavanj). Ker je zaporedje navzdol omejeno z 0, mora biti torej navzgor neomejeno. To pomeni, da za poljubno število $M \in \mathbb{R}$ obstaja člen zaporedja, da je $b_m > M$. Vendar pa to pomeni, da za število $1/M$ obstaja člen $a_m < 1/M$; to je ekvivalentno temu, da je 0 stekališče (za poljuben $\epsilon = 1/M$ obstaja člen a_m znotraj okolice).
Trditev lahko dokažemo tudi s pomočjo podzaporedij: Ker je (b_n) neomejeno, obstaja podzaporedje (b_{nk}), ki gre proti ∞; zaradi neenakosti iz besedila je limita (a_{nk}) enaka 0. Torej je 0 stekališče (a_n), saj je limita nekega podzaporedja.
Ker zaporedje (b_n) v splošnem nima limite, ne moremo tega predpostaviti za zaporedje $(1/b_n)$. Torej ne moremo uporabiti izreka o sendviču ali podobnih izrekov, ki zahtevajo obstoj limite. Tak sklep lahko naredimo samo za neko podzaporedje.
b) Nekateri protiprimeri:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n},$$
$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{n}{n+1}.$$

c) Ker limiti obstajata lahko limitiramo neenakost

$$0 < a_n \leq \frac{1}{b_n}$$

in dobimo

$$0 \leq L \leq \frac{1}{L}$$
$$0 \leq L^2 \leq 1.$$

Od tod sledi, da je $L \in [0,1]$. *Ko neenačbo limitiramo se desni neenačaj spremeni v neenačaj z enakostjo(Npr.* $0 < 1/n$*, limita pa je enaka* 0*).*