

Analiza 1 (F): 1. kolokvij

20.11.2013

Čas pisanja je 100 minut. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti.
Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Reši neenačbo

$$\frac{x - |x + 3|}{x + |x + 3|} \leq 3.$$

Množico rešitev zapiši kot interval ali unijo intervalov.

2. naloga (25 točk)

Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}.$$

Z indukcijo pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$a_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}.$$

Določi infimum in minimum zaporedja, če obstajata. Ali obstajata supremum in maksimum?

3. naloga (25 točk)

Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbi:

(a) $\operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{z} = 1 - \frac{1}{|z|^2}$

(b) $z^4 = 81 - 81i$

4. naloga (25 točk)

(a) Izračunaj limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 5}{2^n + n} \right)^{\frac{2^n}{n}}$.

(b) Zaporedje je podano z rekurzivno formulo $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ in začetnim členom $a_1 = 4$. Pokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.