ANALIZA 1 (fin) - 2. kolokvij (rešitve)

21. 1. 2009

1. Funkcija $f(x)$ je dana s predpisom

$$f(x) = x \ln x (3 + 2 \ln x).$$

Določi definicijsko območje funkcije $f(x)$, ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja/padanja, prevoje, intervale konveksnosti/konkavnosti, vse (smiselne) enostranske limite funkcije v vseh robnih točkah definicijskega območja ter skiciraj njen graf.

Rešitev:

Definicijsko območje: $(0, \infty)$

Ničle: $x = 1$ ter $x = e^{-3/2}$

Prvi odvod: $f'(x) = (\ln x + 3)(2 \ln x + 1)$

Kritične točke/lokalni ekstremi: $x = e^{-3}$ (lok.max), $x = e^{-1/2}$ (lok.min)

Naraščanje ($f' > 0$): $(0, e^{-3}) \cup (e^{-1/2}, \infty)$

Padanje ($f' < 0$): $(e^{-3}, e^{-1/2})$

Drugi odvod: $f''(x) = \frac{4 \ln x + 7}{x}$

Prevoj: $x = e^{-7/4}$

$f'' > 0$: $(e^{-7/4}, \infty)$

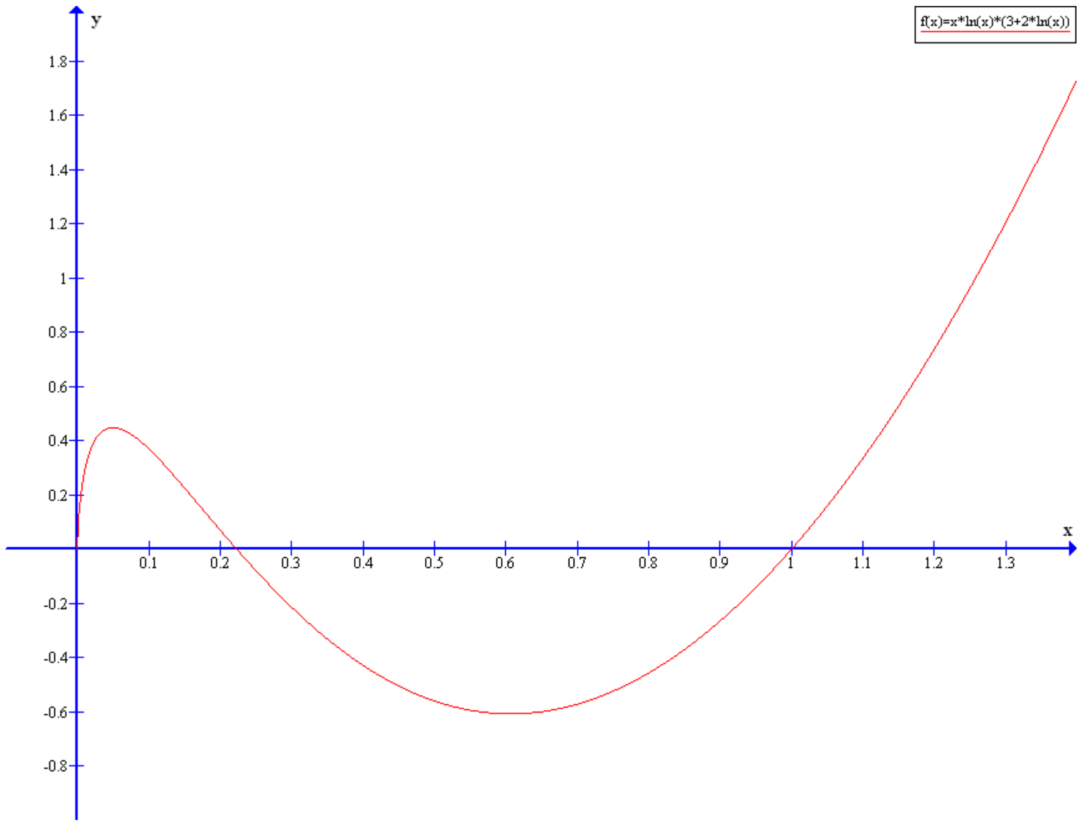
$f'' < 0$: $(0, e^{-7/4})$

Limiti na robovih def.obm.:

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x (3 + 2 \ln x)}{1/x} = \text{L'Hosp.} = \lim_{x \searrow 0} \frac{(3 + 4 \ln x)/x}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x \searrow 0} \frac{3 + 4 \ln x}{-1/x} = \text{L'Hosp.} = \lim_{x \searrow 0} \frac{4/x}{1/x^2} = \lim_{x \searrow 0} 4x = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \text{"}\infty\text{"}$$


y
x
f(x)=x*ln(x)*(3+2*ln(x))
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3

2. Naj bo

$$f(x,y) = e^x + e^y + e^{-x-y}.$$

Določi kritične točke funkcije $f(x,y)$ na $\mathbb{R}^2$ in jih karakteriziraj (lokalni maksimum/minimum, sedlo).

Rešitev:

Kritične točke:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x - e^{-x-y},$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = e^y - e^{-x-y}.$$

Odštejemo enačbi in dobimo $e^x = e^y$, torej $x = y$; vstavimo v prvo enačbo in dobimo $e^x = e^{-2x}$, odtod $e^{3x} = 1$ torej $3x = 0$, končno $x = y = 0$.

Drugi odvodi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x + e^{-x-y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x-y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y + e^{-x-y}.$$

Karakterizacija kritične točke $(0,0)$:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2.$$

Ker je determinanta Hesseve matrike $AC - B^2 = 3 > 0$ strogo poz., gre za lok. ekstrem; in sicer lok.minimum, saj je $A > 0$.

3. Funkcija $z(x,y)$ je v okolici točke $(2,3)$ podana implicitno

$$z^5 - xz^2 + (x-1)(y-2) = 0$$

in zavzame vrednost $z(2,3) = 1$. S Taylorjevim razvojem druge stopnje okoli $(2,3)$ približno izračunaj vrednost $z(2.1, 2.8)$.

Rešitev:

Najprej izračunajmo vse odvode do drugega reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^2 - y + 2}{5z^4 - 2xz},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-x}{5z^4 - 2xz},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2z\frac{\partial z}{\partial x}(5z^4 - 2xz) - (z^2 - y + 2)(20z^3\frac{\partial z}{\partial x} - 2z - 2x\frac{\partial z}{\partial x})}{(5z^4 - 2xz)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(2z\frac{\partial z}{\partial y} - 1)(5z^4 - 2xz) - (z^2 - y + 2)(20z^3\frac{\partial z}{\partial y} - 2x\frac{\partial z}{\partial y})}{(5z^4 - 2xz)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(1-x)(20z^3\frac{\partial z}{\partial y} - 2x\frac{\partial z}{\partial y})}{(5z^4 - 2xz)^2}.$$

Aproksimacija s Taylorjevim polinomom drugega reda je

$$z(x_0 + h, y_0 + k) \approx z(x_0, y_0) + h\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right).$$

Naši odvodi v točki $x_0 = 2, y_0 = 3$ so enaki (upoštevamo $z(2,3) = 1$)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,3) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2,3) = -1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,3) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,3) = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,3) = -16.$$

Upoštevamo $h = 1/10, k = -2/10$ in iz Taylorjeve formule dobimo $z(2.1, 2.8) \approx 0.94$.

4. (a) Naj bo $r > 0$. Na množici

$$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

poišči največjo M_r in najmanjšo m_r vrednost funkcije

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + 2y^2} - 1} - \frac{2}{x^2 + 2y^2}.$$

(b) Izračunaj $\lim_{r \searrow 0} M_r$ ter $\lim_{r \searrow 0} m_r$. Kaj lahko odtod sklepaš o

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \quad ?$$

Odgovor utemelji.

Rešitev:

(a) Zaradi preglednosti enačb v nadaljevanju uvedimo funkcijo h ene spremenljivke z tako:

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z} - 1} - \frac{2}{z}.$$

Naloga sprašuje po največji/najmanjši vrednosti funkcije $f(x, y) = h(x^2 + 2y^2)$ pri vezi $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Rešujmo z metodo vezanih ekstremov. Rešiti moramo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y},$$

v našem primeru je to

$$2xh'(x^2 + 2y^2) = 2\lambda x, \quad 4yh'(x^2 + 2y^2) = 2\lambda y$$

$$2x(h'(x^2 + 2y^2) - \lambda) = 0, \quad 2y(2h'(x^2 + 2y^2) - \lambda) = 0. \tag{1}$$

Imamo več možnosti:

- $x = 0$: potem iz vezi dobimo $y = \pm r$, torej kritični točki $(0, r)$ ter $(0, -r)$
- $y = 0$: potem iz vezi dobimo $x = \pm r$, torej kritični točki $(r, 0)$ ter $(-r, 0)$

- če sta hkrati x in y neničelna, iz (1) sledi

$$h'(x^2+2y^2)-\lambda=0, \quad 2h'(x^2+2y^2)-\lambda=0$$

in odtod $h'(x^2+2y^2)=0$. Toda

$$h(z)=\frac{\sqrt{1+z}+1}{(\sqrt{1+z}-1)(\sqrt{1+z}+1)}-\frac{2}{z}=\frac{\sqrt{1+z}-1}{z}$$

in zato je odvod $h'(z)$ enak

$$h'(z)=\frac{2\sqrt{1+z}-z-2}{2z^2\sqrt{1+z}}=\frac{(2\sqrt{1+z}-z-2)(2\sqrt{1+z}+z+2)}{2z^2\sqrt{1+z}(2\sqrt{1+z}+z+2)}=$$

$$=\frac{-z^2}{2z^2\sqrt{1+z}(2\sqrt{1+z}+z+2)}. \tag{2}$$

Ker raziskujemo možnost $h'(x^2+2y^2)=0$, kjer je očitno $x^2+2y^2=z>0$, nas zanimajo strogo pozitivne ničle pravkar izračunanega odvoda, in teh očitno ni. Zato kritične točke v tem primeru ne dobimo.

Imamo torej štiri kritične točke, v njih izvrednotimo našo funkcijo

$$f(0,r)=h(2r^2), \quad f(0,-r)=h(2r^2),$$

$$f(r,0)=h(r^2), \quad f(-r,0)=h(r^2).$$

Torej je večje med številoma $h(2r^2)$ ter $h(r^2)$ maksimum M_r, manjše pa minimum m_r. Prejšnji izračun odvoda (2) očitno pokaže, da je naša funkcija h padajoča, zato

$$M_r=h(r^2)=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}-1}-\frac{2}{r^2}, \quad m_r=h(2r^2)=\frac{1}{\sqrt{1+2r^2}-1}-\frac{1}{r^2}.$$

Opomba: To nalogo je mogoče rešiti tudi brez vezanih ekstremov. Iz vezi izrazimo npr. $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, vstavimo v f in dobimo funkcijo ene spremenljivke x: $f(x,\pm\sqrt{r^2-x^2})=h(2r^2-x^2)$. Iščemo torej ekstrem te funkcije za $x\in[-r,r]$. Kandidati sta robni točki ($x=\pm r$) in kritične točke (dobimo le $x=0$). V njih izvrednotimo f in poiščemo najmanjšo in največjo vrednost.

(b) Ker je

$$\lim_{r \searrow 0} m_r = \lim_{r \searrow 0} h(2r^2), \quad \lim_{r \searrow 0} M_r = \lim_{r \searrow 0} h(r^2)$$

sta očitno obe limiti enaki in sicer je njuna vrednost

$$\lim_{z \searrow 0} h(z) = \lim_{z \searrow 0} \frac{\sqrt{1+z}-1}{z} = \lim_{z \searrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+z}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Odtod smemo sklepati, da je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{1}{2}$, saj slednji limiti pomenita, da se na vedno manjših krožnicah ($r \searrow 0$) največja in najmanjša vrednost funkcije f približujeta isti vrednosti $1/2$, to pa je takorekoč definicija limite funkcije dveh spremenljivk.

5. (a) Navedi Rolleov izrek.

   (b) Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in velja $f(0) = 1, f(1) = 0$ ter $f'(0) > 0$, dokaži, da obstaja $t \in (0,1)$, kjer je $f'(t) = 0$.

   Rešitev:

   (a) Rolleov izrek: Če je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a,b]$, odvedljiva na (a,b), potem obstaja $t \in (a,b)$, tako da velja $f'(t) = 0$.

   (b) Strikten dokaz: ker je $f'(0) > 0$, je malce na desno od ničle točka $a \in (0,1)$, v kateri je $f(a) > 1$, saj pozitiven odvod intuitivno pomeni, da ima tangenta v $x = 0$, ki za vrednosti blizu 0 dobro aproksimira našo funkcijo, pozitiven naklon, tj. je naraščajoča. Natančneje obstoj točke a dokažemo tako: ker je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} > 0$$

   po definicije limite, obstaja $\delta > 0$, da za $0 < |h| < \delta$ velja $|(f(h) - 1)/h - f'(0)| < f'(0)/2$ (za ε iz definicije limite smo vzeli $f'(0)/2 > 0$). Potem je $a := \min\{\delta/2, 1/2\}$ dobra izbira. Očitno je $a \in (0,1)$ in velja $|a| < \delta$. Torej je

$$\left|\frac{f(a)-1}{a} - f'(0)\right| < \frac{f'(0)}{2} \Longrightarrow \frac{f(a)-1}{a} \in (f'(0)/2, 3f'(0)/2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f(a)-1)/a > f'(0)/2 \Longrightarrow f(a) > 1 + af'(0)/2 > 1.$$

Potem po izreku o vmesni vrednosti za zvezne funkcije (in naša zvezna je, saj je odvedljiva) na intervalu $(a, 1)$ funkcija f zavzame vse vrednosti med $f(a) > 1$ in $f(1) = 0$, torej tudi 1 – to točko imenujmo $b \in (a, 1) \subseteq (0, 1)$. Ker je $f(b) = f(0) = 1$ in so ostali pogoji Rolle-ovega izreka izpolnjeni, obstaja $t \in (0, b) \subseteq (0, 1)$, kjer je $f'(t) = 0$.

Opomba: Možni so tudi drugačni (pravilni) dokazi. Za pravilen dokaz se šteje pravilna ideja in ustrezni sklici na potrebne izreke, ni potreben tako podroben dokaz kot je naveden tu.