Ime in priimek:____________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Predavalnica:_____ Vrsta:_____ Sedež:_____

1:_____ 2:_____ 3:_____ 4:_____ 5:_____ Skupaj:________

Drugi kolokvij - ANA1(FM)
20.1.2010

1. S pomočjo L'Hospitalovega pravila določi limiti

$$(a)\ \lim_{x\searrow\pi} \sin x \ln(\operatorname{tg} x), \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{\cos x - 1}\right).$$

Rešitev:

(a)

$$\lim_{x\searrow\pi} \sin x \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x\searrow\pi}\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\sin x}} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\searrow\pi}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\searrow\pi} -\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{\cos x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x - 1)+x^2}{x^2(\cos x - 1)} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x + 2x}{2x(\cos x - 1) - x^2\sin x} \overset{L.P.}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x + 2}{2(\cos x - 1) - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x + 2}{2(\cos x - 1) - 4x\sin x - x^2\cos x} \overset{L.P.}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{-2\sin x - 4\sin x - 4x\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{-6\sin x - 6x\cos x + x^2\sin x} \overset{L.P.}{=}$$

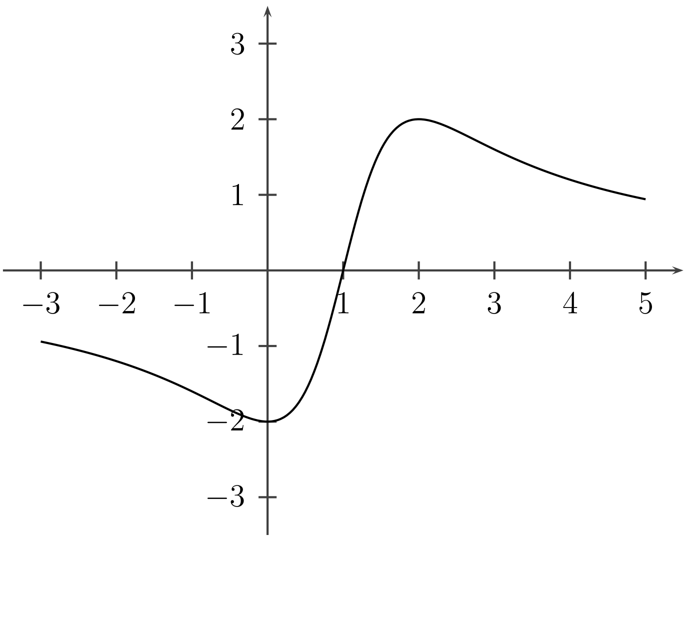
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{-6\cos x - 6\cos x + 6x\sin x + 2x\sin x + x^2\cos x} = \frac{2}{-12} = -\frac{1}{6}$$

2. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{4x-4}{x^2-2x+2}.$$

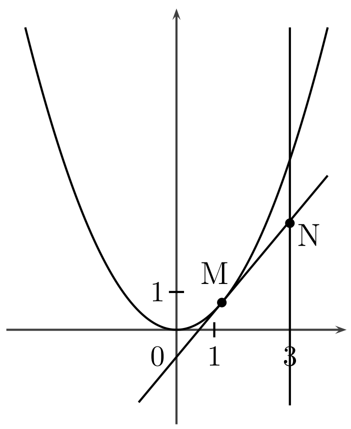
Določi definicijsko območje funkcije f, ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti, limiti v neskončnosti ter skiciraj njen graf.

Rešitev:
Definicijsko območje: $\mathbb{R}$
Ničle: $x = 1$
Prvi odvod: $f'(x) = \dfrac{-4x^2+8x}{(x^2-2x+2)^2}$
Lokalni ekstremi: $x = 0$ (lok. minimum), $x = 2$ (lok. maksimum)
Intervali naraščanja ($f' > 0$): $(0, 2)$
Intervali padanja ($f' < 0$): $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Drugi odvod: $f''(x) = \dfrac{8x^3-24x^2+16}{(x^2-2x+2)^3}$
Prevoji: $x = 1-\sqrt{3}$, $x = 1$, $x = 1+\sqrt{3}$
Intervali konveksnosti ($f'' > 0$): $(1-\sqrt{3}, 1) \cup (1+\sqrt{3}, \infty)$
Intervali konkavnosti ($f'' < 0$): $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1, 1+\sqrt{3})$
Limiti v neskončnosti: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x-4}{x^2-2x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$



3. Naj bo M poljubna točka na paraboli $y = \frac{x^2}{2}$. Tangenta na to parabolo v točki M seka premico $x = 3$ v točki N. Označimo z d dolžino odseka MN.
(a) Zapiši d kot funkcijo koordinate x točke M.
(b) Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije iz točke (a). Določi tudi globalne ekstreme te funkcije.

Rešitev:
(a)



Točka M ima kordinate $(x, \frac{x^2}{2})$. Tangenta na parabolo v točki M ima koeficient enak $(\frac{x^2}{2})' = x$, torej je enačba te tangente enaka $Y - \frac{x^2}{2} = x(X - x)$ oziroma $Y = xX - \frac{x^2}{2}$. N je presečišče te tangente s premico $X = 3$, torej ima N koordinate $(3, 3x - \frac{x^2}{2})$. Zato velja

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-3)^2(x^2+1)}.$$

(b) Namesto funkcije $d(x)$ lahko obravnavamo funkcijo

$$D(x) = d(x)^2 = (x-3)^2(x^2+1).$$

Velja

$$D'(x) = 2(x-3)(x^2+1) + 2x(x-3)^2 = 2(x-3)(x^2+1+x(x-3)) =$$

$$= 2(x-3)(2x^2-3x+1) = 4(x-3)(x-1)(x-\frac{1}{2}),$$

$$D''(x) = 4\left[(x-1)(x-\frac{1}{2}) + (x-3)(x-\frac{1}{2}) + (x-3)(x-1)\right].$$

Kandidati za lokalne ekstreme so torej točke $x = 3$, $x = 1$ in $x = \frac{1}{2}$. Ker velja $D''(3) = 20 > 0$, $D''(1) = -4 < 0$ in $D''(\frac{1}{2}) = 5 > 0$, sta točki $x = 3$ in $x = \frac{1}{2}$ lokalna minimuma, točka $x = 1$ pa lokalni maksimum funkcije $D(x)$ in zato tudi funkcije $d(x)$.
Ker je $d(3) = 0$ in $d(\frac{1}{2}) = \frac{5\sqrt{5}}{4}$, je 3 globalni minimum funkcije $d(x)$. Ker velja $\lim\limits_{x\to\pm\infty} d(x) = \infty$ globalni maksimum funkcije $d(x)$ ne obstaja.

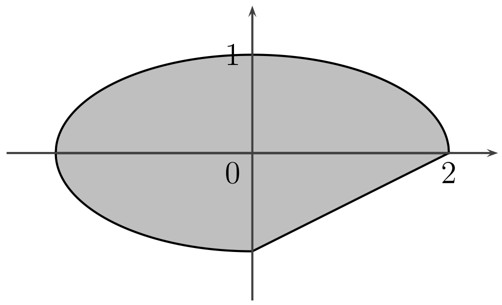
4. Poišči globalni maksimum in minimum funkcije

$$f(x,y) = x^2 + 8xy + 4y^2$$

na množici

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1,\ y \ge \frac{x}{2} - 1\right\}.$$

Rešitev:



Kandidati za globalne ekstreme funkcije f so stacionarne točke in točke na robu območja. Stacionarne točke so rešitve sistema

$$0 = f_x(x,y) = 2x + 8y$$

$$0 = f_y(x,y) = 8x + 8y.$$

Edina rešitev tega sistema je $x = 0$ in $y = 0$.

Robne točke območja obravnavamo s pomočjo vezanih ekstremov. Na premici $y = \frac{x}{2} - 1$ lahko iskanje ekstremov funkcije f prevedemo na iskanje ekstremov funkcije

$$\tilde{f}(x) = f(x, \frac{x}{2} - 1) = 6x^2 - 12x + 4$$

(na intervalu $[0,2]$). Velja $\tilde{f}'(x) = 12x - 12$, torej je kandidat za ekstrem pri $x = 1$, to je točka $(1, -\frac{1}{2})$. Seveda sta kandidata tudi pri $x = 0$ in $x = 2$, torej točki $(0,-1)$ in $(2,0)$. Na elipsi $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ pa ekstreme iščemo s pomočjo Lagrangeovih multiplikatorjev. Tvorimo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 8xy + 4y^2 + \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1).$$

Kandidati za ekstreme so stacionarne točke te funkcije, to so rešitve sistema

$$0 = F_x(x,y,\lambda) = 2x + 8y + \frac{1}{2}\lambda x$$

$$0 = F_y(x,y,\lambda) = 8x + 8y + 2\lambda y$$

$$0 = F_\lambda(x,y,\lambda) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1.$$

Iz prvih dveh enačb izrazimo λ, da dobimo $-\frac{4x+16y}{x} = \lambda = -\frac{4x+4y}{y}$, od koder sledi $4y^2 = x^2$. To vstavimo v tretjo enačbo, da dobimo $y^2 = \frac{1}{2}$ in $x^2 = 2$. Imamo torej štiri rešitve $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, od katerih pa zadnja ne leži v našem območju. Kandidati za globalne ekstreme so torej točke $(0,0)$, $(0,-1)$, $(2,0)$, $(1,-\frac{1}{2})$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Velja $f(0,0) = 0$, $f(0,-1) = 4$, $f(2,0) = 4$, $f(1,-\frac{1}{2}) = -2$, $f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 12$, $f(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -4$, $f(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 12$. Torej sta globalna maksimuma funkcije f točki $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, globalni minimum pa točka $(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. Naj bo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija, katere Taylorjev polinom druge stopnje v točki $(2,4)$ je enak

$$T_{2,(2,4)}(h_1,h_2) = 2 + 3h_1 + h_2 - h_1h_2 + \frac{1}{4}h_2^2.$$

Definiramo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = g(x, x^2)$.
(a) Poišči Taylorjev polinom druge stopnje za funkcijo f v točki 2.
(b) S pomočjo točke (a) približno izračunaj vrednost $f(2.1)$.

Rešitev:
(a) Taylorjev polinom druge stopnje v točki $(2,4)$ za funkcijo g je enak

$$\begin{aligned} T_{2,(2,4)}(h_1,h_2) &= g(2,4) + g_x(2,4)h_1 + g_y(2,4)h_2 + \\ &+\frac{1}{2}g_{xx}(2,4)h_1^2 + g_{xy}(2,4)h_1h_2 + \frac{1}{2}g_{yy}(2,4)h_2^2. \end{aligned}$$

Od tod lahko sklepamo, da velja

$$g(2,4) = 2, \quad g_x(2,4) = 3, \quad g_y(2,4) = 1,$$

$$g_{xx}(2,4) = 0, \quad g_{xy}(2,4) = -1, \quad g_{yy}(2,4) = \frac{1}{2}.$$

Taylorjev polinom druge stopnje za funkcijo f v točki 2 je enak

$$T_{2,2}(h) = f(2) + f'(2)h + \frac{1}{2}f''(2)h^2.$$

Velja $f(x) = g(x, x^2)$, torej

$$f'(x) = g_x(x,x^2) + 2xg_y(x,x^2)$$

$$f''(x) = g_{xx}(x,x^2) + 2xg_{xy}(x,x^2) + 2g_y(x,x^2) + 2xg_{yx}(x,x^2) + 4x^2g_{yy}(x,x^2).$$

Od tod lahko izračunamo $f(2) = 2$, $f'(2) = 7$ in $f''(2) = 2$. Torej velja

$$T_{2,2}(h) = 2 + 7h + h^2.$$

(b) Velja $f(2+h) \approx T_{2,2}(h)$, torej $f(2.1) \approx T_{2,2}(0.1) = 2.71$.