

## Deseta domača naloga

1. Naj bo  $f$  zvezna na  $[1, 2]$ , odvedljiva na  $(1, 2)$  in naj velja  $f(2) = 2f(1)$ . Dokaži, da za nek  $t \in (1, 2)$  velja  $f'(t) = \frac{f(t)}{t}$ .  
*Nasvet:* Lagrangejev izrek za funkcijo  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

2. Dokaži, da za vsaka  $x, y \in \mathbb{R}$  velja  $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$ .

3. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-10x}$ ,  
(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$   
(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sin \pi x}$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}$ .

4. Čimbolj natančno nariši grafe naslednjih funkcij:

(a)  $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ , (b)  $f(x) = x - \ln(x+1)$ ,  
(c)  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$ , (d)  $f(x) = \operatorname{arctg} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$ ,  
(e)  $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$ , (f)  $f(x) = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$ .

5. V elipso

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vriši pravokotnik, ki ima stranice vzporedne osem elipse in ima največjo možno ploščino.

6. Kraji  $A, B, C$  ležijo v ravnini tako, da je kot pri  $B$  pravi, razdalja med točkama  $A$  in  $B$  pa je 200 km. Avto odpelje iz točke  $A$  v smeri točke  $B$  s hitrostjo 60 km/h. Ob enakem času štarta vlak iz točke  $B$  proti točki  $C$  s hitrostjo 40 km/h. Čez koliko časa bo razdalja med avtom in vlakom najmanjša?

7. Naj bosta  $a$  in  $b$  pozitivni realni števili. Med vsemi premicami, ki vsebujejo točko  $(a, b)$ , poišči tisto, pri kateri je

(a) dolžina odseka te premice v prvem kvadrantu najmanjša. Koliko je ta dolžina?

(b) ploščina trikotnika, ki ga oklepajo  $x$  os,  $y$  os ter premica, najmanjša. Kolikšna je ta ploščina?