Rešitve desete domače naloge

1. Za funkcijo $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ velja $g(1) = g(2) = f(1)$. Po Lagrangeovem izreku obstaja $t \in (1, 2)$, tako da je $g'(t) = \frac{g(2)-g(1)}{2-1} = 0$. Poračunamo $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Sledi $f'(t) = \frac{f(t)}{t}$.

2. Odvod funkcije $\arctan(x)$ je $\frac{1}{x^2+1}$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ je njegova vrednost med 0 in 1. Po Lagrangeovem izreku sledi $\frac{\arctan(x)-\arctan(y)}{x-y} = \frac{1}{z^2+1} \leq 1$ za nek $z \in (x, y)$ oz. $z \in (y, x)$. Sledi $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.

3. (a) Za $a, b \neq 0$ (za $a, b = 0$ izraza nista dobro definirana) dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\sin(ax))}{\log(\sin(bx))} = \lim_{x\to 0} \frac{a\tan(bx)}{b\tan(ax)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(bx)}{\cos(ax)} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} e^{-10x}x^5 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}e^{-10x}x^4 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5}e^{-10x}x^3 = \cdots = \lim_{x\to\infty} Ce^{-10x} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \log x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x} = -1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} x^{1-x} = e^{-1}.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-x+e^x-1}{(e^x-1)\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x x + e^x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x x + 2e^x} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

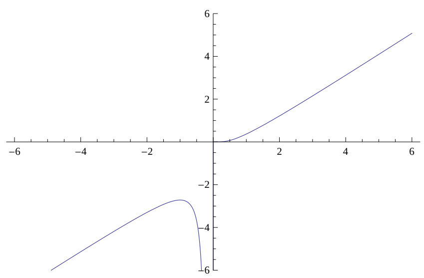
(e)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{2\pi\sqrt{3x+1}\cos(\pi x)} = -\frac{3}{4\pi}.$$

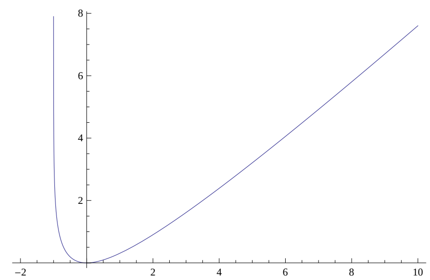
(f)

$$\lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(2x+1)^2\left(\frac{1}{(2x+1)^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{2}$$

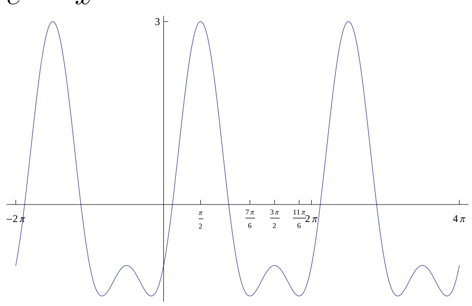


$e^{-1/x}x$

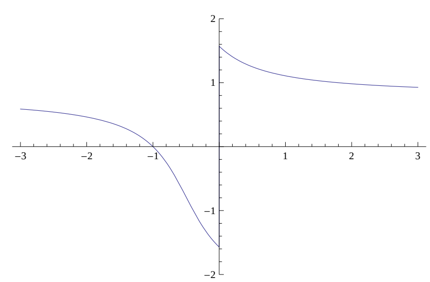


$x - \log(x+1)$

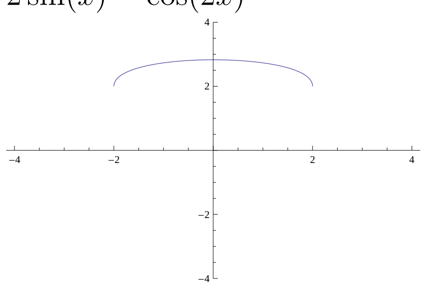
4.



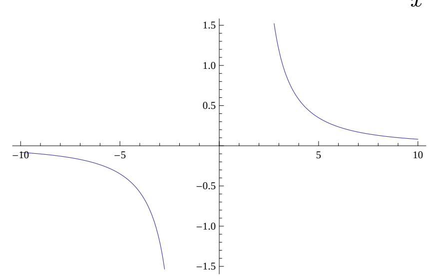
$2\sin(x) - \cos(2x)$



$\arctan 1 + \frac{1}{x}$



$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$



$\frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$

5. Ploščina pravokotnika z x koordinato $t \in [0,a]$ je $4t\sqrt{b^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}$. Iščemo t_0, kjer je ta ploščina maksimalna. Ekvivalentno je iskati maksimum

funkcije $f(t) = b^2t^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)$. Velja

$$f'(t) = \frac{2b^2\left(a^2t - 2t^3\right)}{a^2}.$$

Ničle so $t = 0, t = -\frac{a}{\sqrt{2}}, t = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Geometrijsko je jasno, da pri $t = 0$ dobimo najmanjšo, pri $t = \frac{a}{\sqrt{2}}$ pa največjo ploščino. Analitično to preverimo tako, da izračunamo drugi odvod f v teh točkah, tj.

$$f''(t) = \frac{2b^2\left(a^2 - 6t^2\right)}{a^2}$$

in zato $f''(0) = 2b^2 > 0$, $f(\frac{a}{\sqrt{2}}) = -4b^2 < 0$.

6. Kvadrat razdalje med avtom in vlakom ob času t je $f(t) = (200 - 60t)^2 + 1600t^2$. Velja $f'(t) = 3200t - 120(200 - 60t)$ in zato $f'(\frac{30}{13}) = 0$. Iz $f''(t) = 10400 > 0$ sledi, da gre res za minimum pri $t = \frac{30}{13}$.

7. (a) Naj bo $y = kx + n$ poljubna premica skozi (a, b). Velja $b = ka + n, 0 = kx_0 + n, y = n$, kjer $(x_0, 0)$ ter $(0, n)$ ležita na premici. Kvadrat dolžine odseka v prvem kvadrantu je $\left(-\frac{n}{k}\right)^2 + n^2$ oz. $\frac{a^2n^2}{(b-n)^2} + n^2$. Velja

   $$f'(n) = \frac{2a^2n^2}{(b-n)^3} + \frac{2a^2n}{(b-n)^2} + 2n.$$

   Iščemo ničle te funkcije. Dobimo $\frac{n\left(-a^2b-(b-n)^3\right)}{(n-b)^3}$. Realni ničli števca sta $n = 0$ in $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b = n$. Geometrijsko je jasno, da je pri drugi ničli dosežen minimum. Ta minimum je $\sqrt{\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^3}$.

   (b) V oznakah prejšnje naloge nas zanima minimum izraza $f(t) = -\frac{an^2}{2(b-n)}$. Velja $f'(t) = -\frac{a\left(2bn-n^2\right)}{2(b-n)^2}$. Ničli sta $n = 0$ ter $n = 2b$. Minimum je pri $n = 2b$ in je enak $2ab$.