Rešitve sedemnajste domače naloge

1. Kandidati za lokalne ekstreme so točke, kjer sta oba parcialna odvoda f_x in f_y enaka 0 in točke na robu območja D. Dobimo enačbi:

$$f_x = \cos x + \cos(x+y) = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = -\cos(x+y),$$

$$f_y = \cos y + \cos(x+y) = 0 \;\Rightarrow\; \cos y = -\cos(x+y).$$

Od tod sledi $\cos x = \cos y$. Ker je funkcija cos na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ injektivna, sledi $x = y$. Velja še $\cos x = -\cos(2x)$. S pomočjo grafa funkcije (ali pa z reševanjem kvadratne enačbe $\cos x = -\cos^2 x + (1-\cos^2 x)$) ugotovimo, da mora veljati bodisi $x = 0$ bodisi $x = \pi - 2x$, tj. $x = \frac{\pi}{3}$. Hessejeva matrika je

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Determinanta je pozitivna, vhod (11) pa je negativen, zato gre za lokalni maksimum. Le-ta je enak $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Obravnavati moramo še točke na robu območja:

$$f(0,y) = 2\sin y \;\Rightarrow\; \max: f(0, \frac{\pi}{2}) = 2;\ \min: f(0,0) = 0,$$

$$f(\frac{\pi}{2}, y) = 1+\sin y+\cos y \;\Rightarrow\; \max: f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = 1+\sqrt{2};\ \min: f(\frac{\pi}{2}, 0) = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2.$$

$$f(x,0) = 2\sin x \;\Rightarrow\; \max: f(\frac{\pi}{2}, 0) = 2;\ \min: f(0,0) = 0,$$

$$f(x, \frac{\pi}{2}) = \sin x+1+\cos y \;\Rightarrow\; \max: f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = 1+\sqrt{2},\ \min: f(0, \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2.$$

Torej sta največja in najmanjša vrednost funkcije f na D enaki $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ in 0.

2. Iščemo točko, kjer je zavzet minimum funkcije

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{x-y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x-1}{2}\right)^2.$$

Točka, kjer je $f_x = f_y = 0$, je $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Pri tem je vrednost funkcije $f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{5}{18}$.

3. (a) Iščemo lokalni vezan ekstrem funkcije $f(x,y) = xy$ pri pogoju $g(x,y) = 0$, kjer je $g(x,y) = x+y-12$. Najti moramo stacionarne točke funkcije

$$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x+y+12).$$

Iz $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ dobimo $x = y = 6$, ki sta iskani števili.

(b) Iščemo lokalni vezan ekstrem funkcije $f(x,y) = xyz$ pri pogoju $g(x,y,z) = 0$, kjer je $g(x,y) = x+y+z-12$. Najti moramo stacionarne točke funkcije

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x+y+12).$$

Iz $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ dobimo rešitve $(0,0,12), (0,12,0), (12,0,0), (4,4,4)$. Pri prvih treh je zavzet minimum, pri zadnji pa maksimum funkcije f.

4. Iščemo lokalni vezani ekstrem funkcije $f(x,y)$ pri pogoju $x+y=9$. Upoštevamo lahko, da je $\frac{1}{x+y} = 9$, tako da je za iskanje kandidata za maksimum funkcije iskati stacionarne točke funkcije $\ln(x) + \ln(y) - \ln(1+x) - \ln(8+y)$ pri pogoju $x+y=9$. Nastavimo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = \ln(x) + \ln(y) - \ln(1+x) - \ln(8+y) - \lambda(x+y-9).$$

Iz $F_x = F_y = 0$ dobimo enačbo $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{8}{y(y+8)}$ oz.

$$8x(x+1) = y(y+8).$$

Upoštevamo še $y = 9-x$ in dobimo enačbo

$$7x^2 + 34x - 7 \cdot 19 = 0.$$

Rešitvi sta $x_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 + 4 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 7}}{14}$. Ker mora biti $x > 0$, da bo $\ln x$ dobro definiran, je dobra samo rešitev

$$x = \frac{-34 + \sqrt{34^2 + 4 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 7}}{14}.$$

Od tod lahko izračunamo še y in vrednost funkcije f, tj. -3.331.

5. Spet imamo opravka z vezanim ekstremom. Naj bodo (x_0, y_0) in (x_1, y_1) koordinate točk na premici $y_0 = x_0 - 2$ ter paraboli $y_1 = x_1^2$. Iščemo ekstrem funkcije

$$f(x, y) = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

pri pogojih $y_0 = x_0 - 2$ in $y_1 = x_1^2$. Tvorimo funkcijo

$$F(x_0, y_0, x_1, y_1, \lambda, \mu) = f(x, y) + \lambda(y_0 - x_0 + 2) + \mu(y_1 - x_1^2)$$

in izračunajmo njene stacionarne točke. Dobimo enačbe

$$-2(x_1 - x_0) - \lambda = 0,$$

$$2(x_1 - x_0) - 2\mu x_1 = 0,$$

$$-2(y_1 - y_0) + \lambda = 0,$$

$$2(y_1 - y_0) + \mu = 0.$$

Iz prve, tretje in četrte ugotovimo

$$-2(x_1 - x_0) = \lambda = 2(y_1 - y_0) = -\mu.$$

Upoštevamo to v drugi enačbi in dobimo

$$\mu - 2\mu x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2}.$$

Iz pogoja $y_1 = x_1^2$ dobimo še $y_1 = \frac{1}{4}$. Sedaj izrazimo λ iz prve in tretje enačbe ter dobimo

$$-2(x_1 - x_0) = 2(y_1 - y_0).$$

Vstavimo $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{4}$ in pogoj $y_0 = x_0 - 2$ ter dobimo $x_0 = \frac{11}{8}$. Od tod pa še $y_0 = -\frac{5}{8}$. Iskana daljica je torej $\overline{PQ}$, kjer sta $P = (\frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$ in $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

6. Parcialno odvajamo po x ter y in dobimo enačbi

$$3x^2 - 3 + 2zz_x + z_x = 0,$$

$$-2y + 4 + 2zz_y + z_y = 0.$$

Da bo (x, y) kritična točka, mora veljati $z_x = z_y = 0$. Od tod dobimo $x = \pm 1$ ter $y = 2$. Obravnavajmo najprej točko $(x, y) = (1, 2)$. Vstavimo ti dve vrednosti v začetno enačbo in dobimo za vrednost $z(1, 2)$ možnosti 2 in -3. Vsako moramo obravnavati posebej. Iz zgornjih enačb izračunamo še mešane odvode z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}. Ne glede na vrednosti $z(1, 2)$ dobimo $z_{xy}(1, 2) = 0$.

(a) Če je $z(1, 2) = 2$, potem dobimo $z_{xx}(1, 2) = -\frac{1}{2}, z_{yy}(1, 2) = -\frac{2}{5}$. Torej je Hessejeva matrika negativno semidefinitna in gre za lokalni maksimum.

(b) Če je $z(1, 2) = -3$, potem dobimo $z_{xx}(1, 2) = \frac{1}{3}, z_{yy}(1, 2) = \frac{2}{5}$. Torej je Hessejeva matrika pozitivno semidefinitna in gre za lokalni minimum.

Na analogen način obravnavamo še točko $(-1, 2)$.

7. Obravnavajmo samo prvo nalogo iz Šestnajste domače naloge, saj je rešitev za drugo nalogo analogna. Imamo funkcijo

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - e^z.$$

Radi bi našli okolico $U_1 \times U_2$ za točko $(1, 0, 0)$, kjer je $(1, 0) \in U_1$ ter $0 \in U_2$, tako da bo za vsako točko $a := (a_1, a_2) \in U_1$ obstajal *natanko en* $b \in U_2$, ki bo zadoščal enačbi $F(a_1, a_2, b) = 0$. Potem bo v okolici U_1 točke $(1, 0)$, rešitev enačbe $F(x, y, z) = 0$ res funkcija $z : U_1 \to U_2$.

Po izreku o implicitni funkciji za obstoj okolic U_1 in U_2 z zgornjimi lastnostmi zadošča, da je matrika $(D_2F)(a, b)$ nesingularna. V našem primeru je to kar skalar, saj je $(D_2F)(a, b) = \frac{\partial F}{\partial z}(a, b)$. Dobimo

$$(2z - e^z)|_{(1,0,0)} = -1.$$

Torej je $D_2F(1, 0, 0)$ nesingularna (različna od 0) in lokalno v okolici točke $(1, 0, 0)$ je rešitev enačbe $F(x, y, z) = 0$ res funkcija $z(x, y)$.