# Tretja domača naloga

1. Z matematično indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:
   (a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$,
   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Z matematično indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

3. Z matematično indukcijo dokaži:
   (a) število $5^n + 2^{n+1}$ je deljivo s 3 za vsak $n \in \mathbb{N}$,
   (b) število $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ je deljivo s 54 za vsak $n \in \mathbb{N}$,
   (c) število $1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$ je deljivo s 7 za vsak $n \in \mathbb{N}$,
   (d) število $3^{3n-2} + 5^{3n-1}$ je deljivo s 14 za vsak $n \in \mathbb{N}$.

4. (*) Z matematično indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geq ((n+1)!)^n .$$

5. Dokaži, da $n$ paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

6. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$1^{-\frac{1}{1}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{3}} + \ldots + n^{-\frac{1}{n}} > \frac{n}{2}.$$