Rešitve tretje domače naloge

1. (a)

   (b)

2.

3. (a)

   (b)

   (c)

   (d)

4.
   - *Baza indukcije* - $n = 1$: $2! \geq (2!)^1$. Trditev velja.
   - *Indukcijska predpostavka:* Naj trditev velja za nek $k \in \mathbb{N}$.
   - *Indukcijski korak:* Dokažimo veljavnost trditve za $k + 1$:

$$\begin{aligned}
& 2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! \geq \\
\geq \quad & ((k+1)!)^k \cdot (2(k+1))! \quad \text{(indukcijska predpostavka)} \\
= \quad & ((k+1)!)^k \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot 2(k+1)) = \\
= \quad & ((k+1)!)^{k+1} \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot 2(k+1) > \\
> \quad & ((k+1)!)^{k+1} \cdot \underbrace{(k+2) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot (k+2)}_{k+1 \text{ clenov}} = \\
= \quad & ((k+2)!)^{k+1}.
\end{aligned}$$

5.
   - *Baza indukcije* - $n = 1$: Premica razdeli ravnino na $2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1$ dela. Trditev velja.
   - *Indukcijska predpostavka:* Naj trditev velja za nek $k \in \mathbb{N}$.
   - *Indukcijski korak:* Dokažimo veljavnost trditve za $k + 1$:
     Imejmo $k+1$ paroma nevzporednih premic, tako da se nobena trojica premic ne seka v skupni točki. Izberimo k izmed teh premic. Ker so tudi te premice paroma nevzporedne in se nobena trojica ne seka v skupni točki, po indukcijski predpostavki te premice razdelijo ravnino na $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ delov. Dodajmo sedaj še $(k+1)-$vo premico. Po predpostavki se ta seka z vsemi od k premic, pri čemer so vsa presečišča različna. Označimo ta presečišča z $A_1, A_2, \ldots, A_k$

tako, da na daljicah A_iA_{i+1} ne leži nobeno drugo presešiče A_j, kjer $j \notin \{i, i+1\}$. Vse daljice $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$ ležijo v različnih delih ravnine glede na izbranih k premic. Vsaka daljica A_iA_{i+1} del, v katerem leži, razdeli na dva dela. Poltraka $(-\infty, A_1)$, (A_k, ∞), pri čemer $-\infty$ in ∞ pomenita 'začetek' in 'konec' premice, prav tako razdelita vsak svoj del ravnine na dva dela. Torej dobimo $k+1$ novih delov ravnine. Skupaj imamo zato $\frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$ delov ravnine.

6.