Rešitve četrte domače naloge

1. (a) $\inf A = -\frac{1}{2}$, $\min A, \sup A, \max A$ ne obstajajo
   (b) če je $c = 0$, je $\inf B = \sup B = \min B = \max B = \frac{1}{2}$, če pa je $c \neq 0$, je $\inf B = 0$, $\sup B = 1$, $\min B, \max B$ ne obstajata
   (c) $\inf C = 0$, $\sup C = 1$, $\min C, \max C$ ne obstajata
   (d) $\inf D = \min D = -9$, $\sup D, \max D$ ne obstajata
   (e) $\inf E = 0$, $\sup E = 1$, $\min E, \max E$ ne obstajata

2. (a) $\inf_n a_n = \min_n a_n = -\frac{1}{2}$, $\sup_n a_n = \max_n a_n = \frac{1}{4}$
   (b) $\inf_n a_n = \min_n a_n = -2$, $\sup_n a_n = 1$, $\max_n a_n$ ne obstaja
   (c) $\inf_n a_n = -2$, $\sup_n a_n = \max_n a_n = -\frac{1}{5}$, $\min_n a_n$ ne obstaja
   (d) $\inf_n a_n = \min_n a_n = 0$, $\sup_n = 1$, $\max_n a_n$ ne obstaja

3. Po definiciji je $\sup(A)$, če obstaja, največje število s iz $\mathbb{R}$, tako da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja nek element $a_\epsilon \in A$, ki zadošča $s < a + \epsilon$. Z drugimi besedami, množica A se poljubno približa številu s, vendar ga ne preseže. Če največje število s ne obstaja, potem pišemo $\sup(A) = \infty$ (definiramo še $\infty + a = \infty$ za vsak $a \in \mathbb{R}$ ter $\infty + \infty = \infty$, kar se zdita smiselni zahtevi). Ločimo dva primera:

   - $\sup(A + B) = \infty$: Od tod sledi, da za vsak $s \in \mathbb{R}$ obstajata elementa $a_s \in A$ in $b_s \in B$, tako da je $s < a_s + b_s$. Zato mora biti vsaj en od elementov a_s in b_s večji od $\frac{s}{2}$. Sledi $\sup(A) > \frac{s}{2}$ ali $\sup(B) > \frac{s}{2}$. Ker je bil $s \in \mathbb{R}$ poljuben, sledi $\sup(A) = \infty$ ali $\sup(B) = \infty$. Od tod pa $\sup(A) + \sup(B) = \infty$.
   - $\sup(A + B) < \infty$: Dokazati je treba $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ in $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$.

     Dokažimo najprej $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Ker za vsaka $a \in A$ in $b \in B$ velja $a + b \leq \sup A + \sup B$, sledi $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Res, če bi bilo $\sup(A+B) > \sup A + \sup B$, potem bi veljalo $\sup(A+B) - \sup A - \sup B > 0$. Po definiciji $\sup(A+B)$ bi obstajala a_0 in b_0, tako da

$$\sup(A + B) < (a_0 + b_0) + \frac{\sup(A + B) - \sup A - \sup B}{2}$$

in od tod

$$\frac{\sup(A+B)+\sup A+\sup B}{2} < a_0 + b_0.$$

Še enkrat upoštevamo $\sup A + \sup B < \sup(A+B)$ in dobimo $\sup A + \sup B < a_0 + b_0$, kar je protislovje.

Dokažimo še $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$. Če bi bil kateri od $\sup A$ ali $\sup B$ enak ∞, potem bi imeli zaporedje $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer $c_n \in A \cup B$, tako da bi veljalo $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. Izberimo neka elementa $a \in A$ ter $b \in B$. Če je $c_n \in A$, potem je $d_n := c_n + b \in A + B$, sicer pa $e_n := a + c_n \in A + B$. Ker velja $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n = \infty$, v obeh primerih sledi $\sup(A+B) = \infty$, kar je protislovje. Torej sta oba $\sup A$ in $\sup B$ končna. Zato za vsak $\epsilon > 0$ obstajata $a_\epsilon \in A$ in $b_\epsilon \in B$, tako da je $\sup A < a_\epsilon + \frac{\epsilon}{2}$ in $\sup B < b_\epsilon + \frac{\epsilon}{2}$. Od tod pa $a_\epsilon + b_\epsilon \in A + B$, $\sup A + \sup B < a_\epsilon + b_\epsilon + \epsilon$ in $a_\epsilon + b_\epsilon \leq \sup(A+B)$. Če bi bilo $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$, potem iz zadnjih dveh neenakosti velja $\sup A + \sup B - \sup(A+B) < \epsilon$. Ker je bil $\epsilon > 0$ poljuben, nas to vodi v protislovje za ϵ-e manjše od $\sup A + \sup B - \sup(A+B)$. Sledi $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$.