

Izpit iz Analize 2

19. junij 2009

1. [25%] Nariši ravninsko krivuljo, podano s pravilom

$$x(t) = 3t^2, y(t) = 3t - t^3, t \in \mathbb{R}.$$

Pri risanju upoštevaj lokalne ekstreme, tangentno premico v izhodišču in tangenti v samopresečišču.

Izračunaj tudi ploščino zanke, ki jo oklepa.

Nalogo lahko rešiš na več načinov, morda pa pomaga naslednja formula:

Če je $y(t) \geq 0$ za smiselne t in je $x(t_1) \leq x(t_2)$, je ploščina med krivuljo in abscisno osjo na intervalu $[x(t_1), x(t_2)]$ enaka absolutni vrednosti integrala

$$\int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt.$$

2. [20%] Izračunaj integrala:

(a) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$

(b) $\int_1^e x \ln^2 x dx$

3. [10%] Utemelji, ali konvergira integral

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{2 + \sin x}{\sqrt[3]{x^2 + x^4}} dx.$$

4. [25%]

(a) Kakšen pogoj mora biti izpolnjen, da lahko funkcijsko vrsto členoma odvajamo? Kaj ta pogoj pomeni v primeru potenčne vrste?

(b) Določi konvergenčno območje vrste

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},$$

(c) Pokaži, da je funkcija

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x)$$

konstantna na intervalu $(0, 1)$.

(d) Določi to konstanto, če veš, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. [20%] Funkcijo

$$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos \frac{x}{3}$$

razvij v Fourierovo vrsto in skiciraj graf vsote te vrste. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1}.$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$