Rešitve prvega izpita iz Analize 2
16. junij 2010

1. [10+10] Izračunaj naslednja nedoločena integrala:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x-x^2}} \qquad\qquad \int \frac{3x^4-1}{x^2}\arctan x^2 dx.$$

Rešitev: Z uporabo substitucije $u = x + 1$ dobimo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{2-(x+1)^2}}dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{2-u^2}}du = \int \frac{u}{\sqrt{2-u^2}}du - \int \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}du =$$

$$-\sqrt{2-u^2} - \arcsin(u/\sqrt{2}) + C = -\sqrt{-x^2-2x-+1} - \arcsin(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + C$$

Drug integral izračunamo z uporabo per partesa:

$$u = \arctan x^2; \quad du = \frac{2x}{1+x^4}dx;$$

$$dv = \frac{3x^4-1}{x^2}dx = (3x^2 - x^{-2})dx; \quad v = x^3 - x^{-1}$$

$$\int \frac{3x^4-1}{x^2}\arctan x^2 dx \overset{pp}{=} (x^3 - x^{-1})\arctan x^2 - \int \frac{2x}{1+x^4}(x^3 - x^{-1})dx =$$

$$(x^3 - x^{-1})\arctan x^2 - \int 2dx = (x^3 - x^{-1})\arctan x^2 - 2x + C.$$

2. [20] Naj bo P ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{2ax}$ zavrtimo okoli osi x, pri čemer je a pozitivno realno število. Ploskev P razdeli kroglo s središčem v izhodišču in radijem $a\sqrt{3}$ na dva dela. Izračunaj razmerje njunih volumnov.

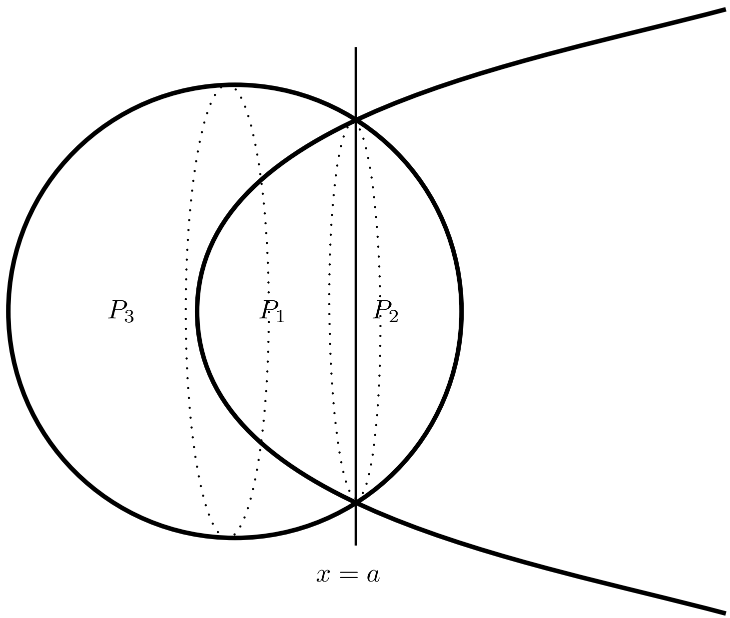
Rešitev: Vstavimo $y = \sqrt{2ax}$ v enačbo sfere, rešimo kvadratno enačbo in ugotovimo, da je presek sfere in ploskve krožnica pri $x = a$. Z uporabo formule za volumen vrtenin in skice izračunamo:

$$P_1 = \pi \int_0^a 2axdx = \pi a^3;$$

$$P_2 = \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - x^2)dx = \pi a^3(2\sqrt{3} - 8/3);$$

$$P_3 = \pi \int_{-a\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}} (3a^2 - x^2)dx - P_1 - P_2 = \pi a^3(2\sqrt{3} + 5/3).$$

Razmerje $P_3/(P_1 + P_2)$ je enako $\frac{6\sqrt{3}+5}{6\sqrt{3}-5}$.



3. [20] Naslednjo limito izračunaj tako, da jo prepoznaš kot Riemannov integral.

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\Big((1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{4}{n^2})\cdots(1+\frac{(n-1)^2}{n^2})(1+\frac{n^2}{n^2})\Big)}$$

Rešitev: Upoštevajoč lastnosti logaritma je limita enaka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\ln(1+\frac{1}{n^2}) + \ln(1+\frac{4}{n^2})\cdots + \ln(1+\frac{(n-1)^2}{n^2}) + \ln(1+\frac{n^2}{n^2})\Big) =$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \overset{per\ partes}{=} \ln 2 - 2 + \pi/2.$$

4. [20] Naj bo dano zaporedje $(a_n)_n$ pozitivnih realnih števil, za katerega vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. S primernimi ocenami dokaži naslednje trditve:

   a) vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ konvergira;
   b) vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n}$ divergira;
   c) vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n^3} - 1)$ konvergira.

Rešitev:

a) Ker prvotna vrsta konvergira je limita členov enaka 0, torej so členi od nekega indeksa (recimo M) naprej manjši od 1. Za te člene velja $a_n^3 < a_n$ torej $\sum_{n=M}^{\infty} a_n^3 < \sum_{n=M}^{\infty} a_n$. Vrsta $\sum_{n=M}^{\infty} a_n^3$ konvergira, saj je členoma navzgor omejena s konvergentno vrsto, torej tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ konvergira.

b) $\lim_{n\to\infty} e^{-a_n} = 1$, vrsta divergira.

c) S primerno (linearno) funkcijo moramo navzgor omejiti funkcijo $e^x - 1$ blizu točke 0. Iz grafa je razvidno (ker je $(e^x-1)'(0) = 1$), da je $e^x - 1 < 2x$ za majhne pozitivne x. Torej za neko število M velja $e^{a_n^3} - 1 < 2a_n, \forall n \geq M$. Podobno kot v točki a) iz tega sklepamo, da $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n^3} - 1)$ konvergira.

5. [20] Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq \pi; \\ -1, & -\pi \leq x < 0; \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in izračunaj

$$S := 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Rešitev: Z uporabo formul za dotične koeficiente dobimo razvoj

$$F(x) = 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Ob izbiri $x = \frac{\pi}{2}$ dobimo

$$3 = 1 + \frac{8}{\pi} S$$

oziroma $S = \frac{\pi}{4}$.