Drugi izpit - ANA2(F) - Rešitve

31.8.2009

1.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+2x^3+x^2+2x-2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \int 1+\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 1+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x+\arctan x+\ln(x+1)+\ln(x-1)+C
\end{aligned}$$

2. Ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}$ obstaja integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2+6x-7}{e^x(x-1)^a}\,\mathrm{d}x.$$

Obravnavati moramo dve morebitni singularnosti integrala. Prva je v neomejeni zgornji meji. Opazimo, da integral tu konvergira pri poljubnem $a \in \mathbb{R}$ (npr. primerjamo s funkcijo $1/x^2$). Druga singularnost je v spodnji meji integrala, kjer imamo

$$\frac{x^2+6x-7}{e^x(x-1)^a} = \frac{x+7}{e^x(x-1)^{a-1}}.$$

Obravnavamo torej pol stopnje $a-1$, za obstoj mora biti $a<2$ (uporabimo kriterij). Rešitev so torej $a \in (-\infty, 2)$.

3. Podana ja funkcija

$$f(x) = x\ \ln(x+2).$$

Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $x=1$, določi območje njene konvergence in izračunaj $f^{(n)}(1)$.

Najprej razvijmo logaritem

$$\ln(x+2) = \ln(3+(x-1)) = \ln 3+\ln(1+\frac{x-1}{3}) = \ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n\ 3^n}.$$

Da bo zgornja vrsta konvergentna, mora veljati

$$\frac{x-1}{3} < 1 \qquad \Rightarrow x \in (-1,4).$$

To uporabimo za razvoj funkcije f

$$\begin{aligned}
x\ln(x+2) &= (1+(x-1))\left(\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n\,3^n}\right)\\
&= \ln 3+\ln 3(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n\,3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n\,3^n}\\
&= \ln 3+(\ln 3+\frac{1}{3})(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n\,3^n}+\frac{(-1)^n(x-1)^n}{(n-1)\,3^{n-1}}\\
&= \ln 3+(\ln 3+\frac{1}{3})(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n\,3^n}-\frac{1}{(n-1)\,3^{n-1}}\right)(x-1)^n.
\end{aligned}$$

Od tod preberemo:

$$f'(1)=\ln 3+\frac{1}{3}$$

$$f^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n\,3^n}-\frac{1}{(n-1)\,3^{n-1}}\right)\;n!.$$

4. Podana je krivulja v polarni obliki

$$r=\frac{1}{\sqrt{1+\cos(\varphi)}}.$$

Pokaži, da ima krivulja vodoravni asimptoti in skiciraj njen graf. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljo in ordinatno osjo.

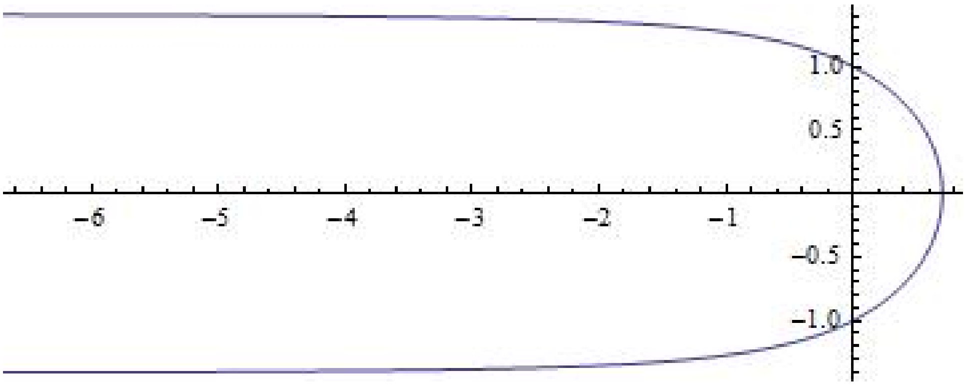
Krivulja ima singularnost pri $\varphi=\pi$. Pokažimo obstoj vodoravne asimptote

$$\lim_{\varphi\to\pi}y(\varphi)=\lim_{\varphi\to\pi}r(\varphi)\sin\varphi=\lim_{\varphi\to\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}}=\lim_{\varphi\to\pi}\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{\sin^2\varphi}}.$$

Sedaj ločimo primera

$$\lim_{\varphi\nearrow\pi}\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}}{\sqrt{\sin^2\varphi}}=\lim_{\varphi\nearrow\pi}\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}}{-\sin\varphi}=-\sqrt{2}$$

$$\lim_{\varphi\searrow\pi}\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}}{\sqrt{\sin^2\varphi}}=\lim_{\varphi\searrow\pi}\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}}{\sin\varphi}=\sqrt{2}$$



Ploščino izračunamo z integracijo

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} = 1.$$

5. Podana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

a) Razvij funkcijo f v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Določi funkcijo h kateri konvergira ta vrsta.

b) Zapiši definicijo enakomerne konvergence funkcijskega zaporedja in funkcijske vrste. Ali Fourierova vrsta iz točke a) konvergira enakomerno? Svoj odgovor utemelji!

Izračunamo koeficiente Fourierjevega razvoja

$$a_0 = 1+\pi,\ a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2},\ b_n = \frac{(-1)^n - 1 - 2\pi(-1)^n}{\pi n}.$$

Vrsta konvergira k F, ki jo dobimo, če periodično razširimo funkcijo f. Izjema so vrednosti, kjer imamo nezveznosti. Uporabimo izrek o Fourierjevih vrstah in dobimo: $F(0) = \frac{1}{2}$, $F(\pi) = F(-\pi) = \frac{1}{2}(1+2\pi)$. Konvergenca vrste ni enakomerna, saj imamo vrsto iz zveznih funkcij, vsota vrste pa ni zvezna. To je v protislovju z izrekom s predavanj.