ANALIZA 2 (FIN, IŠRM) - 1. kolokvij (rešitve)

17. 4. 2009

1. Izračunaj naslednja nedoločena integrala

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}, \qquad \int \frac{dx}{5\cos^2 x + 4\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln\left(1+x^{2/3}\right),$$

$$\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 4\cos x} = \frac{1}{4}\ln\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1} + \frac{5}{12}\ln\frac{\tan(x/2)-3}{\tan(x/2)+3}.$$

2. Izračunaj limito tako, da jo prepoznaš kot limito Riemannovih vsot

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ldots) = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

3. Ugotovi, pri katerih vrednostih realnega parametra $\alpha > 0$ naslednji posplošeni integral konvergira. Odgovor utemelji!

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha + x\sqrt{x}}\,dx.$$

Opomba: Če naloge ne znaš rešiti v dani obliki, lahko za manjše število točk izbereš poljubno **pozitivno** vrednost realnega parametra $\alpha > 0$ in pri tej vrednosti utemeljiš konvergenco oz. divergenco integrala.

Najprej obravnavamo primer $\alpha < 3/2$.

Konvergenca pri $x = 0$:

$$\int_0 \frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha(1 + x^{3/2-\alpha})}\,dx = \int_0 \frac{1}{x^\alpha}\left[\frac{x^\alpha + 1}{1 + x^{3/2-\alpha}}\right] dx$$

Ker ima izraz v oglatih oklepajih neničelno limito $x \to 0$, o konvergenci odloča člen $1/x^\alpha$, torej mora biti $\alpha < 1$, da konvergenca bo.

Konvergenca pri $x = \infty$:

$$\int^\infty \frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha + x^{3/2}}\, dx = \int^\infty \frac{x^\alpha(1 + x^{-\alpha})}{x^{3/2}(1 + x^{\alpha - 3/2})}\, dx =$$

$$\int^\infty \frac{1}{x^{3/2-\alpha}} \left[\frac{1 + x^{-\alpha}}{1 + x^{\alpha-3/2}}\right] dx$$

Ker ima izraz v oglatih oklepajih neničelno limito $x \to \infty$, o konvergenci odloča člen $1/x^{3/2-\alpha}$, torej mora biti $3/2 - \alpha > 1$, ali $\alpha < 1/2$, da konvergenca bo.

Celoten integral torej konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha < 1/2$.

Primer $\alpha \geq 3/2$ se obravnava podobno in se izkaže, da v tem primeru integral nikoli ne konvergira.

4. Dana je ravninska krivulja v parametričnem zapisu

$$x(t) = (t^2 - 1)^2, \quad y(t) = \frac{8}{3}t^3, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

(a) Skiciraj krivuljo. Posebej bodi pozoren na obnašanje krivulje v okolici parametra $t = 0$!

Odvoda $\dot{x} = 4t(t^2 - 1), \dot{y} = 8t^2$ sta pri $t = 0$ oba 0, torej tam tangenta na krivuljo ni definirana. O obnašanju krivulje nam potem nekaj pove obnašanje smernega koeficienta tangente v okolici $t = 0$:

$$k_t = \dot{y}/\dot{x} = 2t/(t^2 - 1)$$

Torej so v okolici točke $t = 0$ tangente skoraj vodoravne. Ker vemo, da ima pri $t = 0$ krivulja "obrat" v x smeri (tj. za negativne t v okoici $t = 0$ x raste, y raste, za pozitivne majhne t pa x pada, y raste), je to možno le, če je pri $t = 0$ ostra konica ("špica").

(b) Izračunaj dolžino tistega dela dane krivulje, ki leži levo od premice $x = 4$.

$$x(t) = (t^2 - 1)^2 \leq 4 \Longrightarrow t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Torej je dolžina

$$L = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 4|t|(t^2+1)\, dt = 30.$$

5. (a) Navedi osnovni izrek analize (oba dela!).

   (b) Dana je funkcija

$$F(x) = \int_{-1}^{x} e^{t^3} \sin t \, dt.$$

   Poišči točko $x \in [-1, 1]$, v kateri je dosežen minimum funkcije F na intervalu $[-1, 1]$.

   Pomoč: poišči kritične točke in jih klasificiraj.

$$F'(x) = e^{x^3} \sin x = 0$$

   Torej je $x = 0$ edina kritična toķa na $[-1, 1]$ in je lokalni minimum, ker

$$F''(0) = (3x^2 e^{x^3} \sin x + e^{x^3} \cos x)|_{x=0} = 1 > 0.$$

   Ker je $x = 0$ edina kritična točka in je lokalni minimum, je tudi globalni minimum.