Rešitve drugega kolokvija iz Analize 2
4. junij 2010

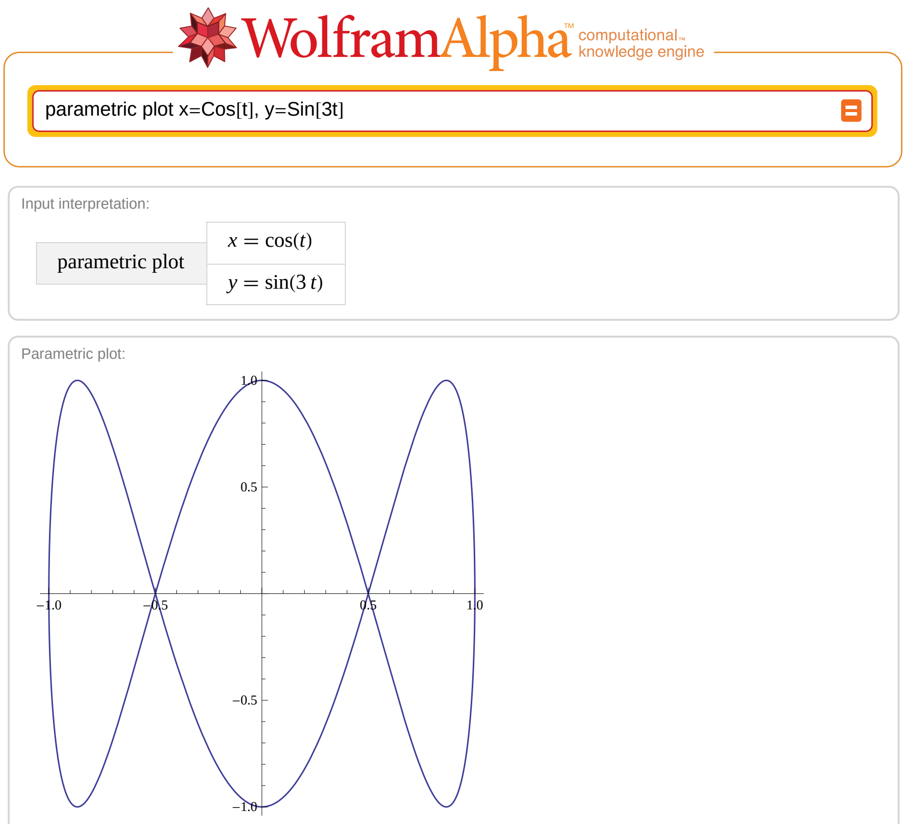
1. Podana je krivulja

$$y^2 = (1 - x^2)(4x^2 - 1)^2.$$

   a) Zapiši krivuljo v parametrični obliki. Namig: Uporabi nastavek $x = \cos(t)$ IN formulo $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

   Rešitev: Enostaven račun z uporabo nastavka in formule pokaže $y = \pm\sin 3t$. Za parametrizacijo zadošča že $y = \sin 3t, t \in [0, 2\pi]$.

   b) Nariši krivuljo! **Rešitev:** Iz grafov funkcij $\cos(t)$ in $\sin(3t)$ skiciramo naslednjo krivuljo.



Generated by Wolfram|Alpha (www.wolframalpha.com) on June 5, 2010 from Champaign, IL.

c) Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja. Namig: $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$.
Rešitev: Ploščino bomo računali z integralom.

$$|\int \dot{x} y dt| = |\int \sin t \sin 3t dt| \stackrel{namig}{=} |\frac{1}{8}\sin 4t - \frac{1}{4}\sin 2t|$$

Krivulja ima samopresečišča pri $t = \pi/3; 5\pi/3$ in $t = 2\pi/3; 4\pi/3$ ter omejuje tri območja. Levo in desno območje imata enako ploščino, ki je enaka

$$|\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \dot{x} y dt| = 3\sqrt{3}/8.$$

Osrednji del ima ploščino enako

$$2|\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \dot{x} y dt| = 3\sqrt{3}/4.$$

Skupna ploscina je $3\sqrt{3}/2$.

2. [20] Določi konvergenčno območje naslednje vrste. Odgovor dobro utemelji.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n \arctan^n(x+1)}{\pi^n \cdot n}$$

Rešitev: Uporabimo lahko korenski kriterij, kvocientni kriterij ali pa izračunamo konvergenčni radij potenčne vrste. Iz prvih dveh kriterijev sledi:

- vrsta konvergira če je $|\arctan(x+1)| < \pi/3$, torej za $x \in (-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$;
- vrsta divergira če je $|\arctan(x+1)| > \pi/3$, torej za $x \notin [-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$.

Pri $x = -1-\sqrt{3}$ dobimo harmonično vrsto, ki divergira. Pri $x = -1+\sqrt{3}$ dobimo alternirajočo harmonično vrsto, ki konvergira. Vrsta torej konvergira natanko za $x \in (-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$.

3. [15] Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, za katera velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln(n)} = 3.$$

Dokaži, da vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergira. Namig: S pomočjo zgornje limite izpelji oceno za člene vrste.
Rešitev: Ker je limita enaka 3 obstaja $m \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln(n)} > 2, \quad \forall n > m.$$

(Namesto 2 lahko vzamemo katerokoli število med 1 in 3.) Ta pogoj pa je ekvivalenten

$$(1/a_n) < n^{-2}, \quad \forall n > m.$$

Ker vrsta $\sum n^{-2}$ konvergira tudi $\sum a_n$ konvergira.

4. [20]

   a) Določi konvergenčno območje in vsoto naslednjih dveh potenčnih vrst.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}.$$

   b) Izračunaj vsoto naslednje vrste.

$$1\cdot\frac{1}{2}+1/2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+1/4\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots+n^{(-1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Rešitev: a) Vrsto $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ členoma integriramo v vrsto $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$. Ta geometrijska vrsta konvergira natanko za $|x|<1$ in ima vsoto $\frac{x}{1-x^2}$. Z odvajanjem dobimo $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}=f(x)$ in isto konvergenčno območje.

Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$ členoma odvajamo v vrsto $2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$. Ta geometrijska vrsta konvergira natanko za $|x|<1$ in ima vsoto $\frac{2x}{1-x^2}$. Z integriranjem dobimo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}=-\ln|1-x^2|+C=g(x)$ in isto konvergenčno območje. Ko vstavimo $x=0$ dobimo $C=0$.

b) Vsota lihih členov je enaka $\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$. Vsota sodih členov je enaka $\frac{1}{2}g(\frac{1}{2})$. Skupaj je vsota $\frac{10}{9}-\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4})$.

5. [20] Funkcijo $f(x)=(x-1)\ln(1-x)+2\cos(x)$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj $f^{(20)}(0)$ in

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x-2}{x^2}.$$

Rešitev: Z uporabo znanih formul za Taylorjev razvoj dobimo razvoj

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Koeficient pred členom x^{20} v tem razvoju je $-\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{2}{20!}$ iz česar sledi

$$f^{(20)}(0)=20!(-\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{2}{20!})=-18!+2.$$

Z uporabo Taylorjevega razvoja dobimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\ldots}{x^2}=\frac{-3}{2}.$$