POGLAVJE 4

Funkcijska zaporedja in funkcijske vrste

1. Konvergenca funkcijskih zaporedij

DEFINICIJA 4.1. *Naj bo* $A \subset \mathbb{R}$ *in naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *dana funkcija* $f_n\colon A \to \mathbb{R}$. *Tedaj funkcije* f_n *sestavljajo* funkcijsko zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Če za vsak $a \in A$ *obstaja limita številskega zaporedja* $(f_n(a))_n$, *rečemo, da funkcijsko zaporedje* konvergira po točkah *na* A. *V tem primeru za* $a \in A$ *označimo* $f(a) := \lim_{n\to\infty} f_n(a)$. *Tako dobljeno funkcijo* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *imenujemo* limitna funkcija *zaporedja* $(f_n)_n$; *pišemo* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *in rečemo, da zaporedje* $(f_n)_n$ konvergira k f po točkah.

PRIMER 4.2. *Izračunaj limitno funkcijo zaporedja* $f_n(x) = x^n$ *za* $x \in [0, 1]$.

DEFINICIJA 4.3. *Naj funkcijsko zaporedje* $(f_n\colon A \to \mathbb{R})_n$ *konvergira po točkah proti limitni funkciji* $f\colon A \to \mathbb{R}$. *Pravimo, da zaporedje* $(f_n)_n$ konvergira proti f enakomerno na A, *če za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* n_ε, *da za vsak* $n \geq n_\varepsilon$ *in za vsak* $x \in A$ *velja* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

PRIMER 4.4. *Funkcijsko zaporedje* $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ *konvergira po točkah na* $\mathbb{R}$. *Kje je konvergenca enakomerna?*

IZREK 4.5 (Zveznost limitne funkcije). *Naj bo* $(f_n\colon A \to \mathbb{R})_n$ *zaporedje zveznih funkcij, ki konvergira proti* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *enakomerno na* A. *Potem je* f *zvezna.*

DOKAZ. Izberimo poljuben $a \in A$ in poljuben $\varepsilon > 0$. Po definiciji enakomerne konvergence za $\varepsilon/3 > 0$ obstaja tak n_0, da za vsak $x \in A$ velja $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ za vsak $n \geq n_0$. Ker je po predpostavki f_{n_0} zvezna v a, za izbrani $\varepsilon/3$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3$ za vsak $x \in A$, $|x - a| < \delta$. Tedaj za vsak $x \in A$ z $|x - a| < \delta$ velja

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) + f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

torej je f zvezna v a. □

DEFINICIJA 4.6. *Naj bo dano zaporedje funkcij* $(f_n\colon A \to \mathbb{R})_n$. *Vsoto* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *imenujemo* funkcijska vrsta.
Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira po točkah na A, *če zaporedje delnih vsot* $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ *konvergira po točkah na* A; *to pomeni, da za vsak* $a \in A$ *konvergira številska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$. *Naj bo* $s\colon A \to \mathbb{R}$ *limitna funkcija zaporedja delnih vsot* $(s_k)_k$.
Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira k $s\colon A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A, *če zaporedje delnih vsot* $(s_k)_k$ *konvergira k* s *enakomerno na* A.

Posledica 4.7. *Če so funkcije $(f_n\colon A \to \mathbb{R})_n$ zvezne in funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira k $s\colon A \to \mathbb{R}$ enakomerno na A, potem je s zvezna na A.*

2. Enakomerno konvergentne vrste

Trditev 4.8 (Weierstrassov kriterij). *Naj bo $(f_n\colon A \to \mathbb{R})_n$ zaporedje funkcij in naj obstaja tako zaporedje pozitivnih števil $(c_n)_n$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n(x)| \le c_n$ za vse $x \in A$. Če je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna, potem funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno in absolutno na A. Če so funkcije f_n zvezne, je tudi vsota vrste zvezna funkcija.*

Dokaz. Ker za poljuben $x \in A$ velja $|f_n(x)| \le c_n$ za vse n, je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna majoranta za $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Funkcijska vrsta torej konvergira absolutno po točkah na A. Označimo s $f(x)$ vsoto funkcijske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Označimo s c še vsoto številske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Potem za izbrani $\varepsilon > 0$ obstaja tak k_0, da za vsak $k \ge k_0$ velja

$$\left| c - \sum_{n=1}^{k} c_n \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

Z upoštevanjem tega sledi

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

za vsak $x \in A$ in vsak $k \ge k_0$. To pomeni, da vrsta res enakomerno konvergira proti f. $\square$

Izrek 4.9 (Integriranje po členih). *Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ omejen interval, $a \in J$, in naj bo $(f_n\colon J \to \mathbb{R})_n$ zaporedje zveznih funkcij na J. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno na J, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt$ konvergira enakomerno za $x \in J$ in za vsak $x \in J$ velja*

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Dokaz. Označimo $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$. Zaradi enakomerne konvergence vrste za poljuben $\eta > 0$ obstaja tak k_0, da za vsak $k \ge k_0$ in vsak $t \in J$ velja

$$\left| f(t) - \sum_{n=1}^{k} f_n(t) \right| < \eta.$$

Ker smemo integral in končno vsoto zamenjati, velja

$$\sum_{n=1}^{k} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{k} f_n(t) \right) dt.$$

Ocenimo:

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x \left(\sum_{n=1}^k f_n(t)\right)\,dt\right| = \left|\int_a^x \left(f(t) - \sum_{n=1}^k f_n(t)\right)\,dt\right| < \eta|x-a| \le 2M\eta,$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevli, da je interval J omejen, torej $J \subseteq [-M, M]$ za neki $M > 0$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ z izbiro $\eta = \varepsilon/2M$ iz zgornje ocene sledi, da $\displaystyle\sum_{n=1}^k \int_a^x f_n(t)\,dt$ konvergira proti $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ enakomerno. □

Primer 4.10. *Vrsta* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *konvergira enakomerno na* $\mathbb{R}$*, vrsta iz odvodov pa ne konvergira povsod na* $\mathbb{R}$.

Izrek 4.11 (Odvajanje po členih). *Naj bo* $J \subset \mathbb{R}$ *interval in naj bo* $(f_n\colon J \to \mathbb{R})_n$ *zaporedje zvezno odvedljivih funkcij na* J*. Če vrsta* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n$ *konvergira po točkah na* J *in vrsta iz odvodov* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n'$ *konvergira enakomerno na* J*, potem je* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n$ *odvedljiva na* J *in za vsak* $x \in J$ *velja*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x).$$

Dokaz. Označimo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ in $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$; po predpostavki je g zvezna funkcija na J. Z upoštevanjem Leibnizove formule in pravila za člено integriranje dobimo

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\,dt &= \int_a^x \left(\sum_{n=1}^\infty f_n'(t)\right)\,dt = \sum_{n=1}^\infty \int_a^x f_n'(t)\,dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Big(f_n(x) - f_n(a)\Big) = f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Po prvem delu osnovnega izreka sledi, da je f odvedljiva na J in njen odvod je g. □

3. Potenčne vrste

Definicija 4.12. *Naj bo* $(a_n)_{n\ge 0}$ *realno zaporedje in* $c \in \mathbb{R}$*. Funkcijsko vrsto* $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n(x-c)^n$ *imenujemo* potenčna vrsta s središčem v c.

Opomba 4.13. (1) *Potenčna vrsta vedno konvergira v središču* c.
(2) *Središče* c *lahko vedno prestavimo v* 0 *z uvedbo nove spremenljivke* $t = x - c$*:*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n.$$

Trditev 4.14. *Naj bo dana potenčna vrsta* $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ *in naj bo* $b > 0$.

(1) *Če vrsta absolutno konvergira pri* $x = b$ *ali* $x = -b$*, potem konvergira absolutno in enakomerno za* $x \in [-b, b]$.
(2) *Če vrsta konvergira pri* $x = b$ *ali* $x = -b$*, potem absolutno konvergira za vsak* $x \in (-b, b)$.
(3) *Če vrsta divergira pri* $x = b$ *ali* $x = -b$*, potem divergira za vsak* $x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$.

Dokaz. (1) Po predpostavki je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n b^n|$ konvergentna. Ker za $x \in [-b,b]$ velja $|a_n x^n| \leq |a_n b^n|$, po Weierstrassovem kriteriju vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira absolutno in enakomerno na $[-b,b]$.

(2) Po predpostavki vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pm b)^n$ konvergira, zato so njeni členi omejeni: obstaja tak $M > 0$, da je $|a_n b^n| \leq M$ za vsak n. Potem je

$$|a_n x^n| = |a_n b^n| \cdot \left|\frac{x}{b}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{b}\right|^n .$$

Vrsta, ki nas zanima, je za $|x| < b$ torej majorirana s konvergentno geometrijsko vrsto.

(3) Neposredno sledi iz (2). □

Definicija 4.15. *Naj bo dana potenčna vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Število*

$$R := \sup\{b \geq 0 \,|\, \textit{vrsta konvergira pri } b\} \in [0,\infty]$$

imenujemo konvergenčni polmer *potenčne vrste.*

Množico vseh x, pri katerih vrsta konvergira, imenujemo konvergenčno območje.

Posledica 4.16. *Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem vrsta absolutno konvergira za $|x| < R$. Vrsta enakomerno konvergira na vsakem manjšem intervalu $|x| \leq r < R$. Vsota potenčne vrste je zvezna funkcija na $(-R,R)$. Vrsta divergira za vse x, $|x| > R$; v krajiščih intervala lahko potenčna vrsta konvergira ali divergira.*

Trditev 4.17 (Konvergenčni polmer). *Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Za konvergenčni polmer velja:*

(1) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, *če ta limita obstaja.*

(2) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *če ta limita obstaja.*

Dokaz. Absolutno konvergenco potenčne vrste lahko preverimo s kvocientnim ali korenskim kriterijem. Kvocientni kriterij pove, da vrsta konvergira absolutno, če je

$$1 > \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \iff |x| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

ter absolutno divergira za

$$|x| > \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Sklepamo, da je konvergenčni polmer vrste enak limiti na desni strani zgornjih neenakosti.

Podobno po korenskem kriteriju vrsta absolutno konvergira, ko velja

$$1 > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \iff |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

ter absolutno divergira za

$$|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

od koder sledi druga formula. □

Primer 4.18. *Določi konvergenčno območje naslednjih vrst:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

Definicija 4.19. *Naj bo $(b_n)_n$ zaporedje realnih števil. Največje stekališče zaporedja $(b_n)_n$ označimo z $\limsup_{n\to\infty} b_n \in [-\infty, \infty]$ in ga imenujemo* limes superior.

Izrek 4.20 (Cauchy-Hadamard). *Konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zadošča*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dokaz. Označimo $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

Če je $a = \infty$, trdimo, da je vrsta divergentna za vsak $x \neq 0$, torej je res $R = 0 = 1/a$. Izberimo poljuben $x \neq 0$. Po predpostavki je neskončno stekališče zaporedja $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$, torej obstajajo poljubno veliki indeksi n, za katere velja $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/|x|$. Torej za vse te indekse velja $|a_n x^n| > 1$, kar pomeni, da členi vrste ne konvergirajo proti 0 in vrsta je divergentna.

Naj bo sedaj $a \in [0, \infty)$. Izberimo poljuben x, ki zadošča $|x| < 1/a$. Izberimo še $r > 0$, ki zadošča $|x| < 1/r < 1/a$. Ker je a največje stekališče zaporedja $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$, obstaja tak n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, torej $|a_n| < r^n$. Potem za vsak $n \geq n_0$ velja

$$|a_n x^n| < |r^n x^n| = |rx|^n.$$

Ker je $|rx| < 1$, ima vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ konvergentno majoranto, torej je konvergentna.

Izberimo še poljuben x, ki zadošča $|x| > 1/a$ oziroma $a > 1/|x|$. Ker je a stekališče zaporedja $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$, obstajajo poljubno veliki indeksi n, za katere velja $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/|x|$ oziroma $|a_n x^n| > 1$. Ker členi vrste ne gredo proti 0, ta divergira. Sklepamo, da je $R = 1/a$. □

Izrek 4.21 (Abel). *Naj bo R konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Če vrsta konvergira za $x = R$ ($x = -R$), potem je vsota vrste zvezna v R ($-R$).*

Izrek 4.22 (Odvajanje in integriranje potenčnih vrst). *Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem imata vrsti, ki ju dobimo s členim odvajanjem $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ in členim integriranjem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ tudi konvergenčni polmer R in za vse $x \in (-R, R)$ velja:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad in \quad \int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Dokaz. Preveriti moramo le, da se pri členem odvajanju in integriranju konvergenčni polmer ne spremeni. Za vrsto iz odvodov imamo

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

kjer smo upoštevali $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Podobno dobimo za vrsto iz integralov

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

$\square$

Posledica 4.23. *Vsota potenčne vrste je poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva na $(-R, R)$, kjer je R konvergenčni polmer vrste.*

Primer 4.24. *Izračunaj vsoto vrste $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.*

4. Taylorjeva vrsta in analitične funkcije

Definicija 4.25. *Naj bo f poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva v okolici točke $c \in \mathbb{R}$.* Taylorjeva vrsta funkcije f s središčem v c *je*

$$T_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ odprt interval in $f \in \mathcal{C}^{\infty}(J)$. Rečemo, da je f analitična *na J, če je za vsak $c \in J$ Taylorjeva vrsta T_c enaka funkciji f na neki okolici točke c.*

Trditev 4.26 (Primeri analitičnih funkcij).

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, && x \in (-\infty, \infty)\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, && x \in (-\infty, \infty)\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, && x \in (-\infty, \infty)\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, && x \in (-1, 1]\\
(1+x)^{\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, && R = 1 \quad \textit{(če α ni nenegativno celo število)}
\end{aligned}$$

Primer 4.27. *Poišči Taylorjevo vrsto za $f(x) = \sqrt{x}$ okoli $x = 1$.*

Trditev 4.28 (Eulerjeva formula). *Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

kjer je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota. Posebej je $e^{i\pi} + 1 = 0$.

5. Fourierove vrste

Definicija 4.29. Fourierova vrsta *je funkcijska vrsta oblike*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

kjer sta $(a_n)_{n \geq 0}$ in $(b_n)_{n \geq 1}$ realni zaporedji.

Definicija 4.30. *Naj bosta $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezni funkciji. Izraz*

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

imenujemo skalarni produkt *funkcij f in g.*
Če je $\langle f, g \rangle = 0$, rečemo, da sta f in g ortogonalni.
Izraz $||f|| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ imenujemo norma *funkcije f.*

Trditev 4.31. *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ima lastnosti skalarnega produkta: za odsekoma zvezne funkcije $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ in skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja:*
(1) pozitivna definitnost: $\langle f, f\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $f(x) = 0$ za vse razen morda končno mnogo x;
(2) simetričnost: $\langle g, f\rangle = \langle f, g\rangle$;
(3) bilinearnost: $\langle \lambda f + \mu g, h\rangle = \lambda\langle f, h\rangle + \mu\langle g, h\rangle$.

Dogovor 4.32. *Za odsekoma zvezno funkcijo f se v tem razdelku dogovorimo, da je vrednost funkcije v točki nezveznosti enaka povprečni vrednosti leve in desne limite v tej točki; v krajišču intervala pa privzamemo, da je funkcija zvezna, torej enaka ustrezni enostranski limiti. Ob tem dogovoru pozitivna definitnost v zgornji trditvi velja za vse odsekoma zvezne funkcije (edina funkcija z normo 0 je ničelna funkcija).*
Ker je v točkah, kjer je f zvezna, funkcijska vrednost enaka limiti funkcije, ki je enaka levi in desni limiti, z zgornjim dogovorom za vsak $x \in (a,b)$ velja

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\nearrow x} f(t) + \lim_{t\searrow x} f(t)\right).$$

Trditev 4.33 (Ortogonalnost sistema trigonometričnih funkcij). *Funkcije*

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots\} = \{1, \cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$$

so paroma ortogonalne na $[-\pi, \pi]$. Rečemo, da te funkcije sestavljajo ortogonalen sistem *na $[-\pi,\pi]$. Poleg tega velja še*

$$||1||^2 = 2\pi, \quad ||\cos nx||^2 = \pi, \quad ||\sin nx||^2 = \pi \quad \textit{za vse } n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Izračunamo skalarne produkte po definiciji (m, n sta naravni števili, za kateri v četrti in peti vrstici privzamemo, da sta različni):

$$\begin{aligned}
\langle 1, \cos(nx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = \left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0\\
\langle 1, \sin(nx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0\\
\langle \cos(nx), \sin(mx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\Big)\,dx = 0\\
\langle \sin(nx), \sin(mx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\Big)\,dx = 0\\
\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\Big)\,dx = 0\\
\langle 1, 1\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi\\
\langle \sin(nx), \sin(nx)\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(1 - \cos(2nx)\Big)\,dx = \pi\\
\langle \cos(nx), \cos(nx)\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(1 + \cos(2nx)\Big)\,dx = \pi
\end{aligned}$$

□

Lema 4.34. *Naj bosta zaporedji $(a_n)_{n\geq 0}$ in $(b_n)_{n\geq 1}$ takšni, da vrsta*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergira enakomerno na $[-\pi, \pi]$. Označimo vsoto vrste s $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Potem je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\langle f(x), 1\rangle}{||1||^2}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\langle f(x), \cos nx\rangle}{||\cos nx||^2}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{\langle f(x), \sin nx\rangle}{||\sin nx||^2}$$

za vse $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Ker je vrsta po predpostavki enakomerno konvergentna, je njena vsota f zvezna funkcija. Zato za poljubno odsekoma zvezno funkcijo g obstaja skalarni produkt $\langle f, g\rangle$ in velja

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx + b_n\sin nx\big)\right)g(x)\,dx \\
&= a_0\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)g(x)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)g(x)\,dx\right) \\
&= a_0\langle 1, g(x)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\langle\cos nx, g(x)\rangle + b_n\langle\sin nx, g(x)\rangle\Big),
\end{aligned}$$

kjer smo pri prehodu v drugo vrstico upoštevali, da je vrsta enakomerno konvergentna.

Sedaj v izpeljano enakost zaporedoma vstavimo $g(x) = 1$, $g(x) = \cos mx$ in $g(x) = \sin mx$, upoštevamo ortogonalnost in dobimo:

$$\begin{aligned}
\langle f, 1\rangle &= a_0||1||^2 = 2\pi a_0 && \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\langle f, 1\rangle \\
\langle f, \cos mx\rangle &= a_m||\cos mx||^2 = \pi a_m && \Longrightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos mx\rangle \\
\langle f, \sin mx\rangle &= b_m||\sin mx||^2 = \pi b_m && \Longrightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin mx\rangle.
\end{aligned}$$

□

Opomba 4.35. (1) *Izračunane formule za koeficiente a_n in b_n so smiselne za vsako odsekoma zvezno funkcijo f. Lahko pa se zgodi, da tako dobljena vrsta divergira ali pa, če konvergira, da njena vsota ni enaka f. V splošnem torej funkcija f ni enaka vsoti svoje Fourierove vrste.*
(2) *Vsota Fourierove vrste je* periodična *funkcija s periodo 2π. Zato je smiselno funkcijo $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, ki jo razvijamo v Fourierovo vrsto, razširiti do periodične funkcije na $\mathbb{R}$.*

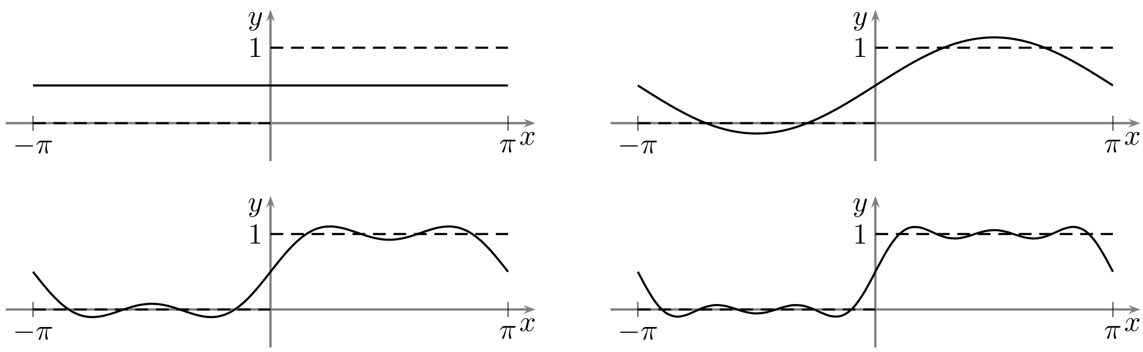
Primer 4.36. *Poišči Fourierovo vrsto funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

in nariši prvih nekaj delnih vsot.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x$$

$$F_0(x) = \frac{1}{2}, \quad F_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x, \quad F_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin(3x)$$
$$F_5(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin(3x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5x)$$



Izrek 4.37. *Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, periodična s periodo 2π. Potem Fourierova vrsta za f konvergira enakomerno in absolutno na $\mathbb{R}$ in njena vsota je enaka f.*

Dokaz. Po predpostavki je drugi odvod funkcije f zvezna funkcija na $[-\pi, \pi]$, zato je omejen: obstaja tak $M > 0$, da je $|f''(x)| \le M$ za vse x. Izraz za koeficient a_n ($n \ge 1$) v Fourierovi vrsti najprej preoblikujemo tako, da dvakrat integriramo per partes:

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (u = f(x),\ dv = \cos(nx)\,dx)\\
&= \frac{f(x)\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx\\
&= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx \qquad (u = f'(x),\ dv = \sin(nx)\,dx)\\
&= \frac{f'(x)\cos(nx)}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx\\
&= -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx,
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevali periodičnost funkcij f' in cos. Sedaj ocenimo velikost koeficienta a_n:

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\,dx \le \frac{1}{n^2\pi}2\pi M = \frac{2M}{n^2}.$$

Na povsem enak način dobimo še $|b_n| \le 2M/n^2$. Da Fourierova vrsta konvergira enakomerno in absolutno sledi iz Weierstrassovega kriterija. Splošni člen vrste lahko namreč navzgor ocenimo takole:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n| \le \frac{4M}{n^2},$$

vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4M}{n^2}$ pa je konvergentna.

Da je vsota vrste res enaka f bo sledilo iz splošnejšega izreka 4.40. □

Definicija 4.38. *Funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je* odsekoma zvezno odvedljiva*, če je odsekoma zvezna na $[a, b]$ in zvezno odvedljiva na $[a, b]$ razen v končno mnogo točkah, v katerih obstajata leva in desna limita odvoda.*

Opomba 4.39. *Odsekoma zvezno odvedljiva funkcija ni odvedljiva v skokih in v točkah, kjer se graf f "zlomi", torej ima različni tangenti levo in desno od te točke. V takšni točki obstajata levi in desni odvod, saj je na primer*

$$f'(x^-) = \lim_{t\nearrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t\nearrow x} f'(t),$$

torej levi odvod obstaja, saj obstaja leva limita odvodov; analogno velja za desni odvod. Če torej v skoku spremenimo vrednost funkcije f tako, da je enaka levi (desni) limiti f v tej točki, potem obstaja levi (desni) odvod funkcije f v tej točki.

Izrek 4.40. *Naj bo $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem Fourierova vrsta za f konvergira proti funkciji f po točkah; bolj natančno, v točki, kjer f ni zvezna, Fourierova vrsta konvergira proti povprečni vrednosti leve in desne limite funkcije v tej točki.*

Lema 4.41 (Riemannova lema). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna. Potem je za $r \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(rx)\,dx = 0.$$

Dokaz. Privzeti smemo, da je f zvezna, saj lahko interval $[a,b]$ razdelimo na končno mnogo podintervalov, na katerih lahko f z morebitno spremembo vrednosti v krajiščih naredimo zvezno. Po definiciji Riemannovega integrala lahko za vsak $\varepsilon > 0$ funkcijo f nadomestimo s tako stopničasto funkcijo g, da velja

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Potem za vsak r velja

$$\left| \int_a^b f(x)\sin rx\,dx - \int_a^b g(x)\sin rx\,dx \right| < \varepsilon.$$

Rezultat je torej dovolj preveriti za stopničaste funkcije. Kot v prvem koraku lahko interval razdelimo na podintervale, na katerih je g konstantna, torej je dovolj dokazati veljavnost trditve za konstante. V tem primeru izračunamo:

$$\int_a^b \sin(rx)\,dx = -\frac{\cos(rx)}{r}\Big|_a^b = \frac{\cos(ra) - \cos(rb)}{r},$$

kar konvergira proti 0, ko gre r v neskončno. $\square$

Dokaz izreka 4.40. Naj bo $F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$ Fourierova vrsta za f, torej je

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \in \mathbb{N}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Dokazati želimo, da Fourierova vrsta F konvergira proti f po točkah, zato najprej preoblikujemo k-to delno vsoto vrste:

$$\begin{aligned}
F_k(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \big(\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx)\big)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k} \cos n(t-x)\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}}\, dt \qquad (\text{vpeljemo } u = t - x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}\, du.
\end{aligned}$$

Pri prehodu iz tretje v četrto vrstico smo upoštevali spodnjo zvezo, ki sledi z uporabo formule za defaktorizacijo $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \cos(n\varphi) &= \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} \sum_{n=1}^{k} \sin\frac{\varphi}{2} \cos(n\varphi) \\
&= \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} \Big(\sin(\frac{\varphi}{2} - \varphi) + \sin(\frac{\varphi}{2} + \varphi) + \sin(\frac{\varphi}{2} - 2\varphi) + \sin(\frac{\varphi}{2} + 2\varphi) + \\
&\qquad \cdots + \sin(\frac{\varphi}{2} - k\varphi) + \sin(\frac{\varphi}{2} + k\varphi)\Big) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{2} + G(\varphi).
\end{aligned}$$

Zgornja formula velja za poljubno odsekoma zvezno funkcijo f. Posebej v primeru $f(x) = 1$ velja $F_k(x) = F_0(x) = 1$ za vsak $k \geq 0$, zato je

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(u)\, du = \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\pi} G(u)\, du = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} G(u)\, du,$$

kjer smo upoštevali sodost funkcije G.

Naj bo sedaj f poljubna odsekoma zvezno odvedljiva funkcija f. Po našem dogovoru o vrednostih funkcije f v točkah nezveznosti za vsak x velja

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
F_k(x) - f(x) &= F_k(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} (f(u+x) - f(x^-)) G(u)\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(u+x) - f(x^+)) G(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \underbrace{\frac{f(u+x) - f(x^-)}{\sin\frac{u}{2}}}_{h_-(u)} \sin\frac{2k+1}{2} u\, du + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(u+x) - f(x^+)}{\sin\frac{u}{2}}}_{h_+(u)} \sin\frac{2k+1}{2} u\, du.
\end{aligned}$$

Funkcija h_- (h_+) je odsekoma zvezna na $[-\pi, 0]$ ($[0,\pi]$) razen morda v 0, kjer izračunamo ustrezno enostransko limito:

$$\lim_{u\nearrow 0} h_-(u) = \lim_{u\nearrow 0} \frac{f(u+x)-f(x^-)}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2f'(x^-)\,;$$
$$\lim_{u\searrow 0} h_+(u) = \lim_{u\searrow 0} \frac{f(u+x)-f(x^+)}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2f'(x^+)\,;$$

pri tem smo funkciji v števcu po potrebi spremenili tako, da sta zvezni pri $u = 0$. Ker sta h_- in h_+ odsekoma zvezni, gresta po Riemannovi lemi integrala proti 0, ko gre k v neskončno. To pomeni, da $F_k(x) - f(x)$ konvergira proti 0, oziroma $F_k(x)$ konvergira proti $f(x)$, ko gre k v neskončno. □

Posledica 4.42. *Naj bo f poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$, periodična s periodo 2π. Potem je f enaka svoji Fourierovi vrsti, ki konvergira enakomerno in absolutno na $\mathbb{R}$. Vrsto lahko poljubno mnogokrat členoma odvajamo in vsota tako dobljene vrste je enaka ustreznemu odvodu funkcije f.*

Definicija 4.43. *Ker lahko vsako odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo na $[-\pi,\pi]$ razvijemo v Fourierovo vrsto, ki konvergira proti f (vsaj po točkah), rečemo, da funkcije $\{1, \cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ sestavljajo* poln sistem funkcij *na intervalu $[-\pi,\pi]$.*

Primer 4.44. *Razvij funkcijo $f(x) = x^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$. S pomočjo razvoja izračunaj $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Posledica 4.45 (Fourierova sinusna in kosinusna vrsta). *Naj bo $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f na intervalu $[0,\pi]$ razvijemo v* sinusno Fourierovo vrsto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

in v kosinusno Fourierovo vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Dokaz. Funkcijo f lahko razširimo do lihe funkcije g na $[-\pi,\pi]$ tako, da definiramo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in (0,\pi] \\ -f(-x) & ; \ x \in [-\pi, 0) \end{cases}.$$

Ker je g liha, je $\langle g, 1\rangle = 0$, $\langle g(x), \cos(nx)\rangle = 0$ in

$$\langle g(x), \sin(nx)\rangle = 2\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

za vsak n.

Podobno lahko f razširimo do sode funkcije h na $[-\pi,\pi]$ s predpisom

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in (0,\pi] \\ f(-x) & ; \ x \in [-\pi, 0) \end{cases}.$$

Zaradi sodosti h velja $\langle h(x), \sin(nx)\rangle = 0$, $\langle h, 1\rangle = 2\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ in

$$\langle h(x), \cos(nx)\rangle = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$

□

Posledica 4.46 (Kompleksna Fourierova vrsta). *Naj bo $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem lahko f razvijemo v* kompleksno Fourierovo vrsto

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx},$$

kjer je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota, koeficienti A_n za $n \in \mathbb{Z}$ pa so dani z

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Dokaz. Iz Eulerjeve formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ sledi še $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, iz obeh formul pa dobimo

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Ko to vstavimo v Fourierovo vrsto, dobimo

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{inx} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-inx} \frac{a_n + ib_n}{2}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx},
\end{aligned}$$

kjer smo označili

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\
A_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) - i\sin(nx))\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \quad (n > 0), \\
A_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx \quad (n > 0).
\end{aligned}$$

Vse tri formule ustrezajo splošni formuli v trditvi. □

Posledica 4.47 (Razvoj v Fourierovo vrsto na drugih intervalih). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva. Potem f lahko razvijemo v Fourierovo vrsto po funkcijah*

$$\left\{1, \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right), \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tako dobimo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)\right),$$

kjer je

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx, \\
a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) dx, \\
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) dx.
\end{aligned}$$