POGLAVJE 1

Integral

1. Primitivna funkcija in nedoločeni integral

DEFINICIJA 1.1. *Naj bo f funkcija ene spremenljivke. Če obstaja odvedljiva funkcija F, za katero velja $F' = f$ na neki množici $A \subset \mathbb{R}$, imenujemo F* primitivna funkcija *funkcije f na A.*

LEMA 1.2. *Naj bosta F in G primitivni funkciji za funkcijo f na nekem* intervalu *J. Potem obstaja konstanta $C \in \mathbb{R}$, da velja $G(x) = F(x) + C$ za vse $x \in J$.*

DOKAZ. Ker za razliko $H = F - G$ velja $H'(x) = 0$ za vsak $x \in J$, po Lagrangeevem izreku sledi, da je H konstanta. □

DEFINICIJA 1.3. Nedoločeni integral *funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)\,dx$, funkcijo f pa imenujemo* integrand.

POSLEDICA 1.4. *Naj bo F neka primitivna funkcija za f na intervalu J. Potem je za $x \in J$*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

TRDITEV 1.5 (Lastnosti nedoločenega integrala). *Za poljubni funkciji f in g, ki imata primitivni funkciji na intervalu J, ter skalar $a \in \mathbb{R}$ velja*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{1}$$

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \tag{2}$$

za $x \in J$; torej je nedoločeni integral linearen. Če je F odvedljiva na J, potem na J velja

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3}$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

2. Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral

TRDITEV 1.6. *Naj bo funkcija g odvedljiva na intervalu J in naj ima funkcija f primitivno funkcijo F na intervalu $g(J) = \{g(x) \,|\, x \in J\}$. Potem je $F \circ g$ primitivna funkcija za $(f \circ g)g'$ na J, torej je*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \tag{4}$$

kjer smo s $t = g(x)$ označili novo spremenljivko.

DOKAZ. Trditev sledi iz verižnega pravila:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x).$$

□

3. Integracija po delih v nedoločenem integralu

TRDITEV 1.7. *Naj bosta f in g odvedljivi na intervalu J. Potem velja*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{5}$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, lahko zgornjo formulo krajše zapišemo:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

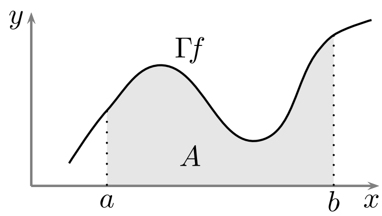
DOKAZ. Trditev sledi s preureditvijo formule za odvod produkta funkcij:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

□

4. Ploščina pod krivuljo

DEFINICIJA 1.8. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija, torej $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a,b]$. Rečemo, da graf funkcije f* omejuje območje *$A \subset \mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a,b]$. Množica A je navzgor omejena z grafom funkcije f, navzdol z abscisno osjo, na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.*



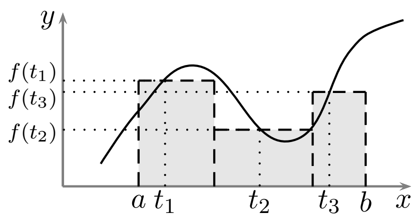
Primeri funkcij, za katere znamo izračunati ploščino:
(1) konstanta: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, območje je pravokotnik, $P = (b-a)c$
(2) poljubna premica: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx + n$, območje je pravokotni trapez, $P = (k\frac{a+b}{2} + n)(b-a)$
(3) $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, območje je četrtina kroga, $P = \pi a^2/4$

Ideja za splošno funkcijo: približek za ploščino dobimo tako, da celotni interval $[a,b]$ razdelimo na kratke podintervale in na vsakem od teh funkcijo zamenjamo s primerno konstanto. Vrednost konstante izberemo tako, da dobljeni pravokotnik dobro aproksimira del območja pod funkcijo na tem intervalu.

PRIMER 1.9. *Približek za ploščino P območja, ki ga omejuje graf funkcije f:*

$$P \approx f(t_1)\delta_1 + f(t_2)\delta_2 + f(t_3)\delta_3,$$

kjer je δ_i širina i-tega pravokotnika (oziroma intervala, na katere smo razdelili $[a,b]$).

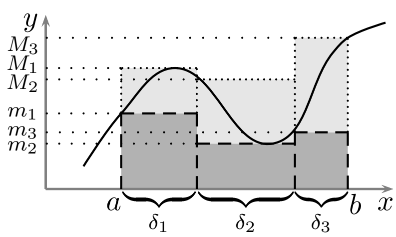


Slabost naključne izbire konstant, ki aproksimirajo funkcijo na podintervalih, je, da ne vemo, kako dober približek dobimo. Lahko pa isto idejo kot zgoraj uporabimo tudi za oceno vrednosti ploščine: če na vsakem podintervalu za konstanto izberemo infimum (supremum) funkcije na tem intervalu, dobimo za rezultat spodnjo (zgornjo) mejo za ploščino.

PRIMER 1.10. *Zgornja in spodnja meja za ploščino P območja, ki ga omejuje f: $P_m \leq P \leq P_M$,*

$$P_m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3,$$
$$P_M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + M_3\delta_3,$$

kjer je m_i infimum in M_i supremum vrednosti funkcije f na i-tem podintervalu.



Pričakujemo, da bomo dobili boljši približek za ploščino, če bomo razdelili interval na več (krajših) podintervalov, na katerih je funkcija skoraj konstantna. To je verjetno mogoče storiti za zvezne funkcije, saj se vrednosti zvezne funkcije ne spreminjajo zelo hitro.

PRIMER 1.11. *Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije $f(x) = x^2$ nad intervalom* $[0, 1]$.

V zgornjem primeru smo lahko prepričani o pravilnosti rezultata, saj sta zaporedji zgornjih in spodnjih mej za ploščino konvergirali k istemu številu. Kaj pa če bi ob vsaki izbiri podintervalov izračunali le en približek (na osnovi izbire vrednosti funkcije na vsakem podintervalu)? Tudi če bi tako dobljeno zaporedje približkov konvergiralo, bi ne mogli trditi, da je njegova limita enaka ploščini, saj je vrednost limite lahko odvisna od izbir, ki jih naredimo v postopku. Morda bi se lahko celo zgodilo, da pri kakšnih izbirah limita ne bi obstajala.

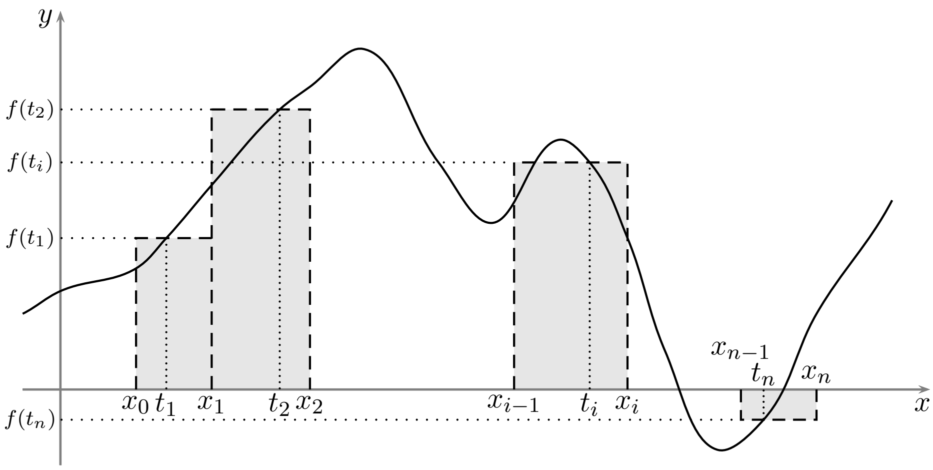
5. Riemannova vsota in Riemannov integral

DEFINICIJA 1.12. Delitev D *intervala* $[a, b]$ *na podintervale je dana z izbiro* delilnih točk x_i*:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

kjer je n neko naravno število. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ (za $i = 1, 2, \ldots, n$) označimo z $\delta_i := x_i - x_{i-1}$. Velikost delitve D *je dolžina najdaljšega podintervala v delitvi D, torej* $\delta(D) = \max\{\delta_i \,|\, i = 1, 2, \ldots, n\}$.
Na vsakem od podintervalov, na katere delitev D razdeli interval $[a, b]$, izberemo testno točko $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *in s $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ označimo nabor vseh izbranih testnih točk; nabor testnih točk je* usklajen *z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, določenem z D, izbrali natanko eno testno točko t_i.*
Riemannova vsota *funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in neki izbiri testnih točk T_D, je*

$$R(f, D, T_D) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i. \tag{6}$$



$$R(f, D, T_D) = f(t_1)\delta_1 + f(t_2)\delta_2 + \cdots + f(t_i)\delta_i + \cdots + f(t_n)\delta_n$$

V definiciji Riemannove vsote smo funkcijo f zamenjali s funkcijo, ki ima na izbranih podintervalih, določenih z delitvijo, konstantne vrednosti – taki funkciji rečemo *stopničasta funkcija.* Riemannova vsota je enaka ploščini območja, določenega s stopničasto funkcijo. Pri tem računamo *predznačeno ploščino*, saj negativnim vrednostim pripada pravokotnik pod abscisno osjo, ki mu pripišemo negativno ploščino. (Opomba: Stopničasti funkciji smo v notranjih delilnih točkah predpisali dve vrednosti – tisto z intervala levo od nje in ono z intervala desno od nje. Seveda tak predpis ne določa funkcije, zato se v vsaki od teh točk odločimo, katero od teh vrednosti naj ima. Ta izbira na vrednost Riemannove vsote očitno ne vpliva, saj ostane ploščina pravokotnika enaka, tudi če mu manjka del stranice ali če se del stranice razteza preko.)

Pričakujemo, da bomo pravo vrednost ploščine dobili, če pošljemo velikost podintervalov proti 0. Vendar moramo paziti, da rezultat ne bo odvisen od izbir, ki določajo Riemannovo vsoto: delitve (oziroma delilnih točk) in testnih točk.

Definicija 1.13. Riemannov integral *ali* določeni integral *funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot $R(f, D, T_D)$, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D intervala $[a,b]$ in usklajenih izbirah testnih točk T_D, ko gre velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita obstaja (torej je končna in je neodvisna od izbire delitev in testnih točk). Pišemo*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{D,T_D \\ \delta(D)\to 0}} R(f, D, T_D).$$

Če zgornja limita obstaja, rečemo, da je funkcija f integrabilna *na $[a,b]$.*

Opomba 1.14. *Zgornja limita ni enaka limitam, kot smo jih navajeni (limita zaporedja, limita funkcije), saj je množica "parametrov", ki se spreminjajo, drugačna. Kaj torej ta limita pomeni? To lahko opišemo na analogen način, kot v znanih primerih. Obstoj zgornje limite pomeni naslednje:*
$\lim\limits_{\substack{D,T_D \\ \delta(D)\to 0}} R(f, D, T_D)$ *je enaka številu I, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno delitev D z $\delta(D) < \delta$ in poljubno usklajeno izbiro testnih točk T_D, velja $|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon$. Nedvisnost limite od izbir smo tako vgradili v definicijo limite.*

Trditev 1.15 (Linearnost določenega integrala). *Naj bosta $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji in $c \in \mathbb{R}$. Potem so $f \pm g$ in cf integrabilne na $[a,b]$ in velja*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{7}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

Dokaz. Za poljubno delitev $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ in usklajeno izbiro testnih točk $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ velja

$$R(f \pm g, D, T_D) = \sum_{i=1}^n (f(t_i) \pm g(t_i))\delta_i = \sum_{i=1}^n f(t_i)\delta_i \pm \sum_{i=1}^n g(t_i)\delta_i = R(f, D, T_D) \pm R(g, D, T_D).$$

Ker po predpostavki obstaja limita izraza na desni neodvisno od izbire delitve D in usklajenih testnih točk T_D, ko gre velikost $\delta(D)$ proti 0, enako velja tudi za levo stran. Od tod takoj sledi pripadajoča formula za integral. Analogno dokažemo homogenost. □

6. Integrabilne funkcije

Trditev 1.16. *Naj bo f integrabilna na $[a,b]$. Potem je f omejena na $[a,b]$.*

Dokaz. Pa recimo, da f ni omejena na $[a,b]$; privzeti smemo, da ni navzgor omejena (sicer f zamenjamo z $-f$). Potem obstaja zaporedje $(c_n)_n$ v $[a,b]$, da velja $f(c_n) \geq n$. Ker je po predpostavki f integrabilna, obstaja njen določeni integral $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Upoštevajmo definicijo obstoja integrala z $\varepsilon = 1$: za ta ε obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno delitev D z velikostjo $\delta(D) < \delta$ ter za poljubno usklajeno izbiro testnih točk T_D velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < 1 \Longrightarrow |R(f, D, T_D)| < |I| + 1.$$

To pomeni, da so za tako izbiro delitve D Riemannove vsote omejene z istim številom $|I|+1$ ne glede na usklajeno izbiro testnih točk.

Izberimo neko delitev D z velikostjo $\delta(D) < \delta$. Ker D razdeli $[a,b]$ na končno podintervalov, obstaja neki podinterval delitve, označimo ga $[x_{j-1}, x_j]$, ki vsebuje neskončno členov zaporedja $(c_n)_n$. Členi zaporedja, ki ležijo na tem podintervalu, torej tvorijo podzaporedje $(c_{n_k})_k$. Označimo $d_k = c_{n_k}$; očitno velja $f(d_k) \geq k$. Sestavimo zaporedje naborov testnih točk T_k, usklajenih z D, takole: za $i \neq j$ na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izberimo testno točko t_i neodvisno od k, na $[x_{j-1}, x_j]$ pa za testno točko vzemimo d_k. Potem velja:

$$R(f, D, T_k) = \sum_{i \neq j} f(t_i)\delta_i + f(d_k)\delta_j \to \infty \quad \text{ko} \quad k \to \infty,$$

saj je vsota neodvisna od k, prav tako $\delta_j > 0$, $f(d_k)$ pa raste preko vseh meja. To je v nasprotju z omejenostjo Riemannovih vsot. Zato sklepamo, da mora biti f omejena. $\square$

Definicija 1.17. *Naj bo $f\colon A \to \mathbb{R}$ funkcija in $B \subset A$. Tedaj z $f|_B\colon B \to \mathbb{R}$ označimo funkcijo z definicijskim območjem B, ki poljuben $x \in B$ preslika v $f(x)$. Funkcijo $f|_B$ imenujemo* zožitev *funkcije f na B.*

Trditev 1.18 (Aditivnost domene). *Naj bodo $a < b < c$ in $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$. Tedaj velja: f je integrabilna na $[a,c]$ natanko tedaj, ko sta integrabilni zožitvi $f|_{[a,b]}$ in $f|_{[b,c]}$. V tem primeru velja*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ker sta po predpostavki zožitvi f na podintervala integrabilni in zato omejeni, je omejena tudi f na celotnem intervalu $[a,c]$. Naj bo D poljubna delitev intervala $[a,c]$ in T_D usklajena izbira testnih točk. Ločimo dva primera:

(1) b je delilna točka v D. Tedaj je $b = x_j$ za neki j in delitev D določa delitvi $D' = \{a = x_0 < \cdots < x_j = b\}$ za $[a,b]$ in $D'' = \{b = x_j < \cdots < x_n = c\}$ za $[b,c]$. Nabor testnih točk T_D razpade na dva nabora: $T' = (t_1, \ldots, t_j)$, ki je usklajen z D', in $T'' = (t_{j+1}, \ldots, t_n)$, ki je usklajen z D''. Zato velja

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^{j} f(t_i)\delta_i + \sum_{i=j+1}^{n} f(t_i)\delta_i = R(f|_{[a,b]}, D', T') + R(f|_{[b,c]}, D'', T'').$$

(2) b ni delilna točka v D. Tedaj je $b \in (x_{j-1}, x_j)$ za neki j in iz delitve D dobimo delitvi $D' = \{a = x_0 < \cdots < x_{j-1} < x'_j = b\}$ za $[a,b]$ in $D'' = \{b = x''_{j-1} < x_j < \cdots < x_n = c\}$ za $[b,c]$. S pomočjo nabora testnih točk T_D sestavimo nabora $T' = (t_1, \ldots, t_{j-1}, t'_j)$, ki je usklajen z D', in $T'' = (t''_j, t_{j+1}, \ldots, t_n)$, ki je usklajen z D'', kjer je t'_j (t''_j) neka točka v zadnjem (prvem) intervalu delitve D' (D''). Zato velja

$$|R(f, D, T_D) - R(f|_{[a,b]}, D', T') - R(f|_{[b,c]}, D'', T'')| = |f(t_j)\delta_j - f(t'_j)\delta'_j - f(t''_j)\delta''_j| \leq 3\delta(D)\max|f|.$$

V obeh primerih torej velja

$$|R(f, D, T_D) - R(f|_{[a,b]}, D', T') - R(f|_{[b,c]}, D'', T'')| \leq 3\delta(D)\max|f|.$$

Opazimo, da gre izraz na desni proti 0, ko gre velikost delitve $\delta(D)$ proti 0. Ker Riemannovi vsoti za zožitvi po predpostavki konvergirata proti ustreznima integraloma, konvergira tudi Riemannova vsota za f na $[a,c]$ in to proti vsoti omenjenih integralov.

($\Rightarrow$) Dokazati želimo, da sta zožitvi f na podintervala integrabilni. Naj bo D' (D'') delitev za $[a,b]$ ($[b,c]$) in T' (T'') usklajena izbira testnih točk. Delitvi D' in D'' skupaj sestavljata delitev D za $[a,c]$, nabora T' in T'' pa z D usklajen nabor testnih točk T. Pri tem za velikost delitve D velja $\delta(D) = \max\{\delta(D'), \delta(D'')\}$. Kot v primeru (1) zgoraj velja

$$R(f, D, T_D) = R(f|_{[a,b]}, D', T') + R(f|_{[b,c]}, D'', T'').$$

Iz privzetka o integrabilnosti f torej sledi, da če ima vsaj eden od členov na desni limito, ko gre $\delta(D) \to 0$, jo ima tudi drugi in formula za integral velja. Pokazali bomo, da ima prvi člen limito.

Označimo $I = \int_a^c f(x)\,dx$. Po definiciji obstoja tega integrala lahko za poljuben $\varepsilon > 0$ izberemo tak $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, da za vsako delitev D z velikostjo $\delta(D) < \delta$ in vsako usklajeno izbiro testnih točk T_D velja $|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon$. Za delitve $D', \tilde{D}'$ za $[a, b]$ in D'' za $[b, c]$ z velikostjo manjšo od δ ter usklajene nabore testnih točk T', $\tilde{T}'$ in T'' torej velja: D' in D'' določata delitev D za $[a, c]$ z velikostjo manjšo od δ, T' in T'' pa usklajen nabor testnih točk T; prav tako $\tilde{D}'$ in D'' določata delitev $\tilde{D}$ z $\delta(\tilde{D}) < \delta$ za $[a, c]$, $\tilde{T}'$ in T'' pa usklajen nabor testnih točk $\tilde{T}$. Potem velja

$$\begin{aligned}|R(f|_{[a,b]}, D', T') - R(f|_{[a,b]}, \tilde{D}', \tilde{T}')| &= |R(f, D, T) - R(f, \tilde{D}, \tilde{T})| \\ &= |(R(f, D, T) - I) - (R(f, \tilde{D}, \tilde{T}) - I)| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Če za $\tilde{D}', \tilde{T}'$ izbiramo delitve in testne točke iz nekega zaporedja $\tilde{D}'_k, \tilde{T}'_k$, za katerega velja $\delta(\tilde{D}'_k) = 1/k$ (ta dolžina je za vse dovolj velike k manjša od δ), dobimo po zgornji neenakosti omejeno zaporedje števil $R_k = R(f|_{[a,b]}, \tilde{D}'_k, \tilde{T}'_k)$, ki ima (vsaj eno) stekališče. Označimo (neko) stekališče tega zaporedja z I_1.

Trdimo, da je I_1 limita Riemannovih vsot za $f|_{[a,b]}$. Res, za neki dovolj velik k velja, da je $|R_k - I_1| < \varepsilon$, zato iz zgornje neenakosti sledi:

$$|R(f|_{[a,b]}, D', T') - I_1| = |(R(f|_{[a,b]}, D', T') - R_k) + (R_k - I_1)| \leq |R(f|_{[a,b]}, D', T') - R_k| + |R_k - I_1| < 3\varepsilon.$$

Ker ta sklep velja za poljuben $\varepsilon > 0$, sledi, da je I_1 limita Riemannovih vsot za $f|_{[a,b]}$. □

Trditev 1.19. *Naj bosta $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funkciji, ki se razlikujeta le v točki $c \in [a, b]$ (torej je $f(x) = g(x)$ za vse $x \in [a, b]$, $x \neq c$). Potem je f integrabilna natanko tedaj, ko je g integrabilna in velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Izberimo poljubno delitev D za $[a, b]$ in usklajen nabor testnih točk T_D. Če c ni ena od testnih točk, potem sta Riemannovi vsoti za f in g, določeni z D in T_D, enaki. Sicer pa je $c = t_j$ za neki j in za razliko Riemannovih vsot za f in g velja:

$$|R(f, D, T_D) - R(g, D, T_D)| = |f(c) - g(c)|\delta_j \leq |f(c) - g(c)|\delta(D).$$

V obeh primerih gre torej razlika Riemannovih vsot za f in g proti 0, ko gre $\delta(D)$ proti 0, zato limita vsot za f obstaja natanko tedaj, ko obstaja limita vsot za g in ti limiti (ko obstajata) sta enaki. □

Primer 1.20 (Omejena funkcija ni nujno integrabilna.). *Funkcija $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, ki ima v vseh racionalnih točkah vrednost enako 1, v iracionalnih pa -1, ni integrabilna.*

Primer 1.21 (Konstante so integrabilne). *Naj bo $f(x) = c$ za $x \in [a, b]$. Za poljubno izbiro delitve D in usklajenega nabora testnih točk T_D velja*

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i = \sum_{i=1}^{n} c\delta_i = c\sum_{i=1}^{n} \delta_i = c(b-a),$$

torej je tudi limita Riemannovih vsot enaka $c(b - a)$, kot smo pričakovali.

Izrek 1.22. *Naj bo f zvezna na $[a, b]$. Potem je f integrabilna na $[a, b]$.*

Spomnimo se definicije zveznosti funkcije f na $[a, b]$: za vsak $x \in [a, b]$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta = \delta_{x,\varepsilon} > 0$, da za poljuben $y \in [a, b]$, ki zadošča $|x - y| < \delta$, velja $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. V dokazu zgornjega izreka bomo potrebovali nekoliko močnejšo lastnost, določeno s strožjim pogojem, ki ga bomo formulirali za funkcije več spremenljivk.

Definicija 1.23. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ je* enakomerno zvezna *na A, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, da za poljubna $x, y \in A$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$, velja $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Trditev 1.24. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna in $f\colon A \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je f enakomerno zvezna na A.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Pa recimo, da f ni enakomerno zvezna: potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata $x, y \in A$, za katera velja $|x - y| < \delta$ in $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Če torej pri tem ε izberemo $\delta = 1/n$, dobimo točki $x_n, y_n \in A$, ki zadoščata:

$$|x_n - y_n| < 1/n, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Ker je A kompaktna, ima zaporedje $(x_n)_n$ stekališče c; naj bo $(x_{n_k})_k$ podzaporedje z limito c. Iz prve neenakosti zgoraj sledi, da tudi $(y_{n_k})_k$ konvergira k c. Ker je f zvezna, zaporedji $(f(x_{n_k}))_k$ in $(f(y_{n_k}))_k$ konvergirata proti $f(c)$, torej njuna razlika konvergira proti 0. To pa je v nasprotju z drugo neenakostjo zgoraj, saj so vsi členi razlike vsaj za ε oddaljeni od 0. □

Dokaz izreka 1.22. Ker je f zvezna, ima za poljubno delitev $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervala $[a, b]$ na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ minimum m_i in maksimum M_i; poleg tega za poljuben usklajen nabor testnih točk $T_D = (t_1, \ldots, t_n)$ velja

$$m_i \leq f(t_i) \leq M_i.$$

Riemannovo vsoto za f, pri kateri f na vsakem podintervalu zamenjamo z najmanjšo (največjo) vrednostjo f na tem intervalu, imenujemo *spodnja (zgornja) Darbouxova vsota* in jo označimo z $\underline{R}(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i\delta_i$ ($\overline{R}(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i\delta_i$). Iz zgornje neenakosti sledi

$$\underline{R}(f, D) \leq R(f, D, T_D) \leq \overline{R}(f, D).$$

Pokazali bomo, da zgornja in spodnja Darbouxova vsota konvergirata proti istemu številu, zato proti temu številu konvergira tudi Riemannova vsota, torej je f integrabilna.

Dokažimo najprej, da razlika med zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto konvergira proti 0, ko gre velikost delitve proti 0. Pri tem si pomagamo z enakomerno zveznostjo f. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Po trditvi 1.24 za ta ε lahko izberemo tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, y \in [a, b]$ z $|x - y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Naj za delitev D velja $\delta(D) < \delta$. Ker sta za vsak $i = 1, \ldots, n$ maksimum M_i in minimum m_i vrednosti funkcije f na i-tem podintervalu, katerega dolžina je manjša od δ, sledi $M_i - m_i < \varepsilon$. Za razliko Darbouxovih vsot tako dobimo:

$$0 \leq \overline{R}(f, D) - \underline{R}(f, D) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\delta_i < \sum_{i=1}^n \varepsilon\delta_i = \varepsilon(b - a).$$

Ker zgoraj lahko za $\varepsilon > 0$ izberemo poljubno število, od tod sledi

$$\lim_{\substack{D \\ \delta(D)\to 0}} (\overline{R}(f, D) - \underline{R}(f, D)) = 0.$$

Darbouxovi vsoti sta omejeni (neodvisno od izbire delitve D) navzdol z $m(b - a)$ in navzgor z $M(b - a)$, kjer sta m in M minimum in maksimum f na $[a, b]$. Če izberemo zaporedje delitev, katerih velikosti gredo proti 0, imajo pripadajoče spodnje Darbouxove vsote stekališče I, torej za vsaka $\varepsilon, \delta > 0$ obstaja delitev D z $\delta(D) < \delta$, za katero velja $|\underline{R}(f, D) - I| < \varepsilon$. Pokazali bomo, da je I limita spodnjih Darbouxovih vsot in zato tudi limita zgornjih Darbouxovih vsot ter posledično limita Riemannovih vsot.

Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Zaradi enakomerne zveznosti f lahko izberemo tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, y \in [a, b]$ z $|x - y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Po prejšnjem odstavku lahko izberemo takšno delitev D_0 z velikostjo manjšo od $\delta/2$, da velja $|\underline{R}(f, D_0) - I| < \varepsilon$. Naj bo D poljubna delitev z velikostjo manjšo od $\delta/2$. Tedaj se stopničasti funkciji, ki določata Darbouxovi vsoti $\underline{R}(f, D_0)$ in $\underline{R}(f, D)$, v vsaki točki razlikujeta za manj kot ε (vrednost vsake od teh funkcij v x je določena z vrednostjo f v neki točki, ki leži v $\delta/2$-okolici x, torej se točki, ki določata vrednosti, razlikujeta za manj kot δ). Ustrezni Darbouxovi vsoti se torej razlikujeta za manj kot $\varepsilon(b-a)$, zato velja:

$$|\underline{R}(f,D)-I| = |(\underline{R}(f,D)-\underline{R}(f,D_0)) + (\underline{R}(f,D_0)-I)| < (b-a+1)\varepsilon.$$

Ker zgornji sklep velja za poljuben $\varepsilon > 0$, sledi, da $\underline{R}(f,D)$ konvergira proti I, ko gre $\delta(D)$ proti 0. $\square$

Definicija 1.25. *Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je* odsekoma zvezna*, če je zvezna v vseh točkah intervala razen morda v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.*
Funkcija f ima skok *v točki $c \in [a,b]$, če f ni zvezna v c, ima pa (končno) levo in desno limito v c (če je c krajišče intervala, potem zahtevamo le obstoj limite na tisti strani c, ki leži v intervalu).*

Posledica 1.26. *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna, potem je integrabilna. Vrednosti funkcije f v skokih ne vplivajo niti na integrabilnost niti na integral funkcije f na $[a,b]$.*

Dokaz. Naj ima f skoke v točkah $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ na (a,b); postavimo še $c_0 := a$ in $c_{n+1} = b$. Potem lahko na vsakem podintervalu $[c_i, c_{i+1}]$ (za $i = 0,1,\ldots,n$) f nadomestimo z zvezno funkcijo tako, da spremenimo njeni vrednosti kvečjemu v krajiščih tega podintervala. Tako dobljena funkcija je na podintervalu integrabilna po izreku 1.22, zato je tam po trditvi 1.19 integrabilna tudi f. Od tod s pomočjo aditivnosti domene sledi, da je f integrabilna na $[a,b]$. $\square$

Trditev 1.27. (1) *Naj bosta f in g integrabilni na $[a,b]$. Če je $f(x) \le g(x)$ na vse $x \in [a,b]$, potem je $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ (*monotonost integrala*).*
(2) *Če je f integrabilna na $[a,b]$, potem je tudi $|f|$ integrabilna na $[a,b]$ in velja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dokaz. (1) Za poljubno delitev D in usklajen nabor testnih točk T_D velja

$$R(f,D,T_D) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\delta_i \le \sum_{i=1}^n g(t_i)\delta_i = R(g,D,T_D).$$

Ker imata po predpostavki obe Riemannovi vsoti limito, ko gre velikost delitev proti 0, se zgornja neenakost prenese tudi na limiti.

(2) Dokažimo to le za odsekoma zvezne funkcije. Kot v dokazu integrabilnosti odsekoma zveznih funkcij je rezultat dovolj preveriti le za zvezne funkcije. Ker je absolutna vrednost zvezna in je kompozitum zveznih funkcij zvezen, je tudi $|f|$ zvezna in zato integrabilna. Očitno velja $f(x) \le |f(x)|$ in $-f(x) \le |f(x)|$ za vsak $x \in [a,b]$, od koder po (1) sledi zadnja neenakost. $\square$

Opomba 1.28. (1) *Integral po izrojenem intervalu $[a,a]$ je nič: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.*
(2) *Če je $a < b$, je $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.*

Definicija 1.29. Povprečna vrednost *funkcije f na intervalu $[a,b]$ je $\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.*

Trditev 1.30. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, $m := \inf f$ in $M := \sup f$. Potem za povprečno vrednost μ funkcije f velja $m \le \mu \le M$. Če je f zvezna, obstaja taka točka $c \in [a,b]$, da je $\mu = f(c)$.*

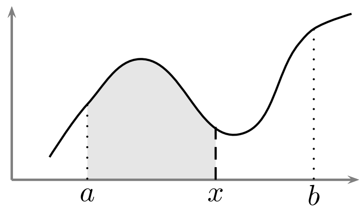
Dokaz. Po definiciji infimuma in supremuma velja $m \le f(x) \le M$ za vsak $x \in [a,b]$. Z uporabo monotonosti integrala od tod sledi:

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Po deljenju z $b-a$ dobimo $m \leq \mu \leq M$.

Če je f zvezna, potem je m njen minimum in M njen maksimum na $[a,b]$. Ker po izreku o vmesni vrednosti zvezna funkcija na intervalu zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom, obstaja taka točka $c \in [a,b]$, da je $\mu = f(c)$. $\square$

7. Osnovni izrek analize



DEFINICIJA 1.31. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Funkcijo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

imenujemo integral kot funkcija zgornje meje.

IZREK 1.32 (Prvi del osnovnega izreka). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ odvedljiva na $[a,b]$ (v krajiščih intervala ima enostranska odvoda) in velja $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$.*

DOKAZ. Dovolj je izračunati odvod funkcije F. Ta odvod bomo izračunali po definiciji. Za $x \in [a,b]$ velja

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) = f(x); \end{aligned}$$

pri prehodu iz druge v tretjo vrstico smo upoštevali aditivnost domene, v naslednjem koraku pa izrek o povprečni vrednosti (ki zagotavlja obstoj ustreznega c med x in $x+h$). $\square$

POSLEDICA 1.33. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ primitivna funkcija za f na $[a,b]$. Torej velja*

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

IZREK 1.34 (Drugi del osnovnega izreka – Leibnizova formula). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in G poljubna primitivna funkcija za f na $[a,b]$. Potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b.$$

DOKAZ. Po prvem delu osnovnega izreka je $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ primitivna funkcija za f. Ker velja $F(a) = 0$ in $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, Leibnizova formula za F velja. Primitivni funkciji F in G za f se na $[a,b]$ razlikujeta za neko konstanto C, torej velja $G(x) = F(x) + C$ za vsak $x \in [a,b]$. Zato je

$$G(b) - G(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

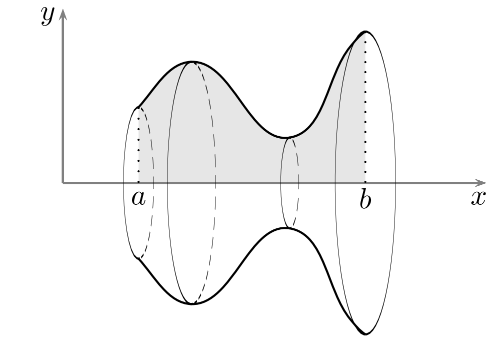
$\square$

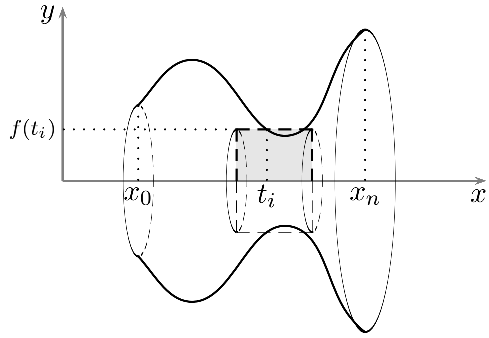
Uporaba 1.35 (Volumen vrtenine). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Telo, ki ga dobimo z vrtenjem območja, ki ga določa funkcija f nad intervalom $[a,b]$, okoli osi x, imenujemo* vrtenina.
Izberimo neko delitev $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ intervala $[a,b]$ in usklajen nabor testnih točk $T_D = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ funkcijo f aproksimiramo s konstanto $f(t_i)$ in na ta način rezino vrtenine med ravninama $x = x_{i-1}$ in $x = x_i$ zamenjamo z valjem s polmerom osnovne ploskve $f(t_i)$ in višino $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. To da približek za volumen vrtenine:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i)^2 \delta_i = \pi R(f^2, D, T_D).$$

Ko pošljemo velikost delitve $\delta(D)$ proti 0, dobimo za volumen vrtenine formulo

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$





8. Pravila za integriranje in Leibnizova formula

Trditev 1.36. (1) *Naj bo $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $f\colon Z_g \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem ob uvedbi nove spremenljivke $t = g(x)$ velja:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt.$$

(2) *Naj bosta $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi. Potem je*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx.$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, zgornja formula postane

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Dokaz. (1) Naj bo F primitivna funkcija za f na intervalu Z_g. Potem je $H(x) = F(g(x))$ primitivna za $h(x) = f(g(x))g'(x)$ na $[a,b]$, zato velja

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt.$$

(2) Ker je

$$H(x) = f(x)g(x) - \int_a^x g(t)f'(t)\, dt$$

primitivna funkcija za $h(x) = f(x)g'(x)$, velja

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \left(f(x)g(x) - \int_a^x g(t)f'(t)\, dt\right)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(t)f'(t)\, dt.$$

□

Primer 1.37. *Naj bo $a \in (0,1)$. Izračunaj ploščino pod grafom $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na $[0,a]$.*

9. Posplošeni integral na omejenem intervalu

DEFINICIJA 1.38. *Naj bo* $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ *funkcija, ki je integrabilna na intervalu* $[t,b]$ *za vsak* $t \in (a,b)$. *Potem je* posplošeni integral *funkcije* f *na intervalu* $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\searrow a} \int_t^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja.

Če limita obstaja, rečemo, da je f posplošeno integrabilna *na* $[a,b]$ *in da je* $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergenten, *sicer pa rečemo, da je integral* divergenten.

OPOMBA 1.39. (1) *Posplošeni integral imenujemo tudi* izlimitirani integral *ali* nepravi integral.
(2) *Če je* f *integrabilna na* $[a,b]$, *potem je njen posplošeni integral na* $[a,b]$ *enak Riemannovemu integralu.*

PRIMER 1.40. *Naj bo* $p \in \mathbb{R}$. *Posplošeni integral* $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ *je konvergenten natanko tedaj, ko je* $p < 1$.

TRDITEV 1.41. *Naj bo* $p \in \mathbb{R}$. *Posplošeni integral* $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ *je konvergenten natanko tedaj, ko je* $p < 1$.

DOKAZ. S substitucijo $t = x - a$ zgornji integral prevedemo na integral v primeru 1.40, za katerega vemo, da je konvergenten natanko tedaj, ko je $p < 1$. $\square$

IZREK 1.42 (Konvergenčni kriterij). *Naj bo* $g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezna.*
(i) *Če je* g **omejena** *na* $(a,b]$ *in je* $p < 1$, *potem je* $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p}\,dx$ *konvergenten.*
(ii) *Če je* g **omejena stran od nič**, *torej obstaja neki* $m > 0$, *da velja* $|g(x)| \geq m$ *za vse* $x \in (a,b]$, *in je* $p \geq 1$, *potem je* $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p}\,dx$ *divergenten.*

OPOMBA 1.43. (1) *Funkcija* g *v izreku je lahko le odsekoma zvezna na* $(a,b]$, *saj je takšna* g *zvezna na nekem manjšem intervalu* $(a,c]$; *ker je integrand potem odsekoma zvezna funkcija na* $[c,b]$, *moramo obravnavati le konvergenco na* $(a,c]$.
(2) *Podobno je v točki (ii) dovolj, da je* g *omejena stran od nič le na nekem manjšem intervalu* $(a,c] \subset (a,b]$.
(3) *Pogoj v točki (i) je izpolnjen, če ima* g *(končno) desno limito pri* a. *Podobno je pogoj v (ii) izpolnjen, če ima* g *od nič različno desno limito v* a.

LEMA 1.44. *Naj bo* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *monotona in omejena funkcija. Potem obstajata limiti*

$$\lim_{x\nearrow b} f(x) \quad \text{in} \quad \lim_{x\searrow a} f(x);$$

ena teh limit je enaka $\sup f$, *druga pa* $\inf f$.

DOKAZ. Analogno dokazu konvergence monotonega omejenega zaporedja. $\square$

TRDITEV 1.45 (Linearnost posplošenega integrala.). *Naj bosta* $f, g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ *posplošeno integrabilni in* $c \in \mathbb{R}$. *Potem sta tudi* $f+g, cf\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ *posplošeno integrabilni in velja*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. Dokazali bomo le, da je vsota posplošeno integrabilna. Preveriti moramo, da obstaja limita kot v definiciji posplošene integrabilnosti:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \lim_{t\searrow a}\int_t^b (f(x)+g(x))\,dx \\ &= \lim_{t\searrow a}\left(\int_t^b f(x)\,dx+\int_t^b g(x)\,dx\right) \\ &= \lim_{t\searrow a}\int_t^b f(x)\,dx+\lim_{t\searrow a}\int_t^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx,\end{aligned}$$

kjer smo pri prehodu iz prve v drugo vrstico upoštevali linearnost določenega integrala, pri prehodu iz druge v tretjo lastnost limite, v zadnjem koraku pa predpostavko, da sta f in g posplošeno integrabilni. □

Opomba 1.46. *Pri oznakah kot v zgornji trditvi velja naslednje: če sta dve od funkcij f, g in $f+g$ posplošeno integrabilni na $[a,b]$, potem je tudi tretja. En primer je zajet v trditvi, iz integrabilnosti f in $f+g$ pa sledi integrabilnost g, saj jo lahko zapišemo kot linearno kombinacijo drugih dveh: $g=(f+g)-f$.*

Dokaz izreka 1.42. Dokazali bomo le prvi del. Po predpostavki je g omejena, zato obstaja $M\in(0,\infty)$, da je $-M\le g(x)\le M$ za vsak $x\in(a,b]$. Ker je $p<1$, je $\int_a^b \frac{M}{(x-a)^p}\,dx$ konvergenten. Funkcija $h(x):=\frac{g(x)}{(x-a)^p}+\frac{M}{(x-a)^p}$ je torej po zgornji opombi posplošeno integrabilna na $[a,b]$ natanko tedaj, ko je posplošeno integrabilna $x\mapsto\frac{g(x)}{(x-a)^p}$. Poleg tega h zadošča $0\le h(x)\le\frac{2M}{(x-a)^p}$.

Integrabilnost funkcije h je določena z obnašanjem $H(t):=\int_t^b h(x)\,dx$, ko $t\searrow a$. Ker je $H'(t)=-h(t)\le 0$, je H padajoča. Poleg tega je H navzgor omejena, saj velja

$$H(t)\le\int_t^b\frac{2M}{(x-a)^p}\le\int_a^b\frac{2M}{(x-a)^p}=I<\infty.$$

Po zgornji lemi torej obstaja limita $H(t)$, ko $t\searrow a$, zato je h (in s tem $x\mapsto\frac{g(x)}{(x-a)^p}$) posplošeno integrabilna. □

Primer 1.47. *Ugotovi ali je $\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ konvergenten.*

Definicija 1.48. (i) *Naj bo $f\colon[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabilna na $[a,s]$ za vsak $s\in(a,b)$. Potem je* posplošeni integral *funkcije f na intervalu $[a,b]$*

$$\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{s\nearrow b}\int_a^s f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je f posplošeno integrabilna *na $[a,b]$ in da je posplošeni integral* konvergenten, *sicer pa imenujemo integral* divergenten.
(ii) *Naj bo $f\colon[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$ integrabilna na $[a,s]$ za vsak $s\in(a,c)$ in integrabilna na $[t,b]$ za*

vsak $t \in (c, b)$*. Potem je* posplošeni integral f *na* $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{s \nearrow c} \int_a^s f(x)\,dx + \lim_{t \searrow c} \int_t^b f(x)\,dx,$$

če obe limiti obstajata.

10. Posplošeni integral na neomejenem intervalu

DEFINICIJA 1.49. (i) *Naj bo* $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *integrabilna na* $[a, s]$ *za vsak* $s > a$*. Potem je* posplošeni integral *funkcije* f *na* $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral konvergenten*, sicer pa, da je* divergenten*.*
(ii) *Naj bo* $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna na* $[t, b]$ *za vsak* $t < b$*. Potem je* posplošeni integral *funkcije* f *na* $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, rečemo, da je posplošeni integral konvergenten*, sicer pa, da je* divergenten*.*
(iii) *Funkcija* $f\colon (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ *je* posplošeno integrabilna*, če sta posplošeno integrabilni zožitvi* $f|_{(-\infty, a]}$ *in* $f|_{[a, \infty)}$ *za neki* $a \in \mathbb{R}$*.*

PRIMER 1.50. *Naj bo* $p \in \mathbb{R}$*. Posplošeni integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ *je konvergenten natanko tedaj, ko je* $p > 1$*.*

IZREK 1.51 (Konvergenčni kriterij). *Naj bo* $g\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *zvezna.*
(i) *Če je* g **omejena** *na* $[a, \infty)$ *in je* $p > 1$*, potem je* $\displaystyle\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ *konvergenten.*
(ii) *Če je* g **omejena stran od nič** *na* $[a, \infty)$ *in je* $p \leq 1$*, potem je* $\displaystyle\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ *divergenten.*

DOKAZ. Postopamo lahko podobno kot v primeru omejenega intervala. Alternativno v zgornji integral uvedemo $x = 1/t$ in s tem prenesemo točko ∞ v 0. Pri tem se potenca x^p spremeni v t^{2-p}. Pogoj za konvergenco (divergenco) v primeru omejenega intervala da $2 - p < 1$ $(2 - p \geq 1)$ oziroma $p > 1$ $(p \leq 1)$. $\square$

PRIMER 1.52. Funkcija gama *je s predpisom* $\Gamma(t) := \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,dx$ *definirana za* $t > 0$ *in velja* $\Gamma(n + 1) = n!$*.*