POGLAVJE 2

# Krivulje v ravnini

## 1. Podajanje krivulj

- **Eksplicitno:** Krivulja $K_f$ je dana kot graf funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, torej
$$K_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\}.$$
- **Implicitno:** Krivulja $K_g$ je dana kot množica rešitev enačbe $g(x,y) = 0$ za neko funkcijo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, torej
$$K_g = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}.$$
- **Parametrično:** Krivulja $K_F$ je dana kot množica vseh točk $(x,y)$, določenih z $x = \alpha(t)$ in $y = \beta(t)$, kjer sta $\alpha, \beta\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ dani funkciji, torej
$$K_F = \{(\alpha(t), \beta(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}.$$
Preslikavo $F(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ imenujemo *pot* ali *parametrizacija* krivulje $K_F$. Krivuljo $K_F$ imenujemo tudi *tir* poti $F$.

  PRIMER 2.1. *Skiciraj krivuljo $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$ za $t \in \mathbb{R}$.*
- **Polarno:** Krivulja $K_h$ je dana kot množica točk v ravnini s polarnima koordinatama $(r, \varphi)$, kjer je $r = h(\varphi)$ za neko funkcijo $h\colon [\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}$, torej
$$K_h = \{(h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi) \mid \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}.$$
  Zveza med kartezičnima koordinatama $(x,y)$ ter polarnima koordinatama $(r,\varphi)$ točke v ravnini:
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi; \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$
  PRIMER 2.2. *Skiciraj krivuljo $r = \sin\varphi$.*

## 2. Enačba tangente na krivuljo

TRDITEV 2.3. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $c \in [a,b]$. Potem ima krivulja $K_f$ tangento v točki $(c, f(c))$, dano z enačbo:*
$$y - f(c) = f'(c)(x - a).$$

Naj bo dana zvezno odvedljiva funkcija $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in točka $(a,b)$, ki zadošča $g(a,b) = 0$. Po izreku o implicitni funkciji enačba $g(x,y) = 0$ določa funkcijo $y = f(x)$ v okolici točke $a$, če je $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$; za to funkcijo velja $f(a) = b$ in
$$f'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}.$$

DEFINICIJA 2.4. *Naj bo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Če je $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, rečemo, da je $(a,b)$* regularna točka *za $g$, sicer pa, da je $(a,b)$* singularna točka *za $g$.*

TRDITEV 2.5. *Naj bo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva v okolici točke $(a,b)$, naj bo $g(a,b) = 0$ in naj bo $(a,b)$ regularna točka za $g$. Potem ima krivulja $K_g$ tangento v točki $(a,b)$, dano z enačbo:*
$$g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b) = 0 \quad \textit{ali} \quad \nabla g(a,b)\cdot(x-a, y-b) = 0\,.$$

DOKAZ. Če v točki $(a,b)$ na krivulji velja $g_y(a,b) \neq 0$, je po izreku o implicitni funkciji krivulja v okolici te točke dana z grafom funkcije $y = f(x)$, za katero velja $f'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$. Enačba tangente na graf $f$ je zato

$$y - b = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}(x-a) \quad \text{ali} \quad g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b) = 0.$$

Če velja $g_x(a,b) \neq 0$, pa je krivulja blizu te točke dana z grafom $x = h(y)$, kjer je $h'(b) = -\frac{g_y(a,b)}{g_x(a,b)}$. Iz enačbe tangente $x - a = h'(b)(y-b)$ po preureditvi dobimo enako kot zgoraj. □

DEFINICIJA 2.6. *Naj bo $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ in $\alpha, \beta\colon (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ odvedljivi.* Odvod poti *$F$ po $t$ je hitrostni vektor $\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$.*
*Če je $\dot{F}(t) \neq (0,0)$ za neki $t$, imenujemo $t$* regularna točka *parametrizacije $F$. Če so vse točke regularne, imenujemo $F$* regularna parametrizacija.

TRDITEV 2.7. *Naj bo $s$ regularna točka parametrizacije $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Potem je tangenta na krivuljo $K_F$ v točki $F(s)$ dana z enačbo*

$$\dot{\alpha}(s)(y - \beta(s)) = \dot{\beta}(s)(x - \alpha(s)).$$

DOKAZ. Tangenta je premica skozi točko $F(s)$ s smernim vektorjem $\dot{F}(s) = (\dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(s))$, zato je poljubna točka $(x,y)$ na tangenti oblike

$$(x,y) = F(s) + u\dot{F}(s), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Če to razpišemo po komponentah, dobimo

$$\begin{aligned} x = \alpha(s) + u\dot{\alpha}(s) &\implies x - \alpha(s) = u\dot{\alpha}(s) \\ y = \beta(s) + u\dot{\beta}(s) &\implies y - \beta(s) = u\dot{\beta}(s). \end{aligned}$$

Parameter $u$ eliminiramo tako, da zgornjo enačbo pomnožimo z $\dot{\beta}(s)$, spodnjo pa z $\dot{\alpha}(s)$ ter ju odštejemo:

$$(x - \alpha(s))\dot{\beta}(s) - (y - \beta(s))\dot{\alpha}(s) = 0.$$

□

TRDITEV 2.8. *Naj bo $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ zvezno odvedljiva pot za $t \in (t_0, t_1)$, ki določa krivuljo $K_F$. Če velja $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ za vse $t \in (t_0, t_1)$, potem je $K_F$ graf neke funkcije $f$, za katero velja*

$$f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}.$$

*Če označimo $x(t) := \alpha(t)$ in $y(t) := \beta(t)$, dobimo za odvod*

$$f'(x(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

DOKAZ. Ker je $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ za vsak $t \in (t_0, t_1)$, je ta odvod bodisi povsod pozitiven bodisi povsod negativen. V prvem primeru je $t \mapsto \alpha(t)$ strogo naraščajoča, v drugem pa strogo padajoča. V obeh primerih je torej injektivna in ima inverzno funkcijo $\alpha^{-1}$:

$$t = \alpha^{-1}(x) \quad \text{in} \quad (\alpha^{-1})'(x) = \frac{1}{\dot{\alpha}(t)}.$$

Oglejmo si reparametrizirano krivuljo

$$G(x) := F(\alpha^{-1}(x)) = (\alpha(\alpha^{-1}(x)), \beta(\alpha^{-1}(x)) = (x, f(x));$$

z zadnjo enakostjo je definirana funkcija $f$, katere graf je dana krivulja. Za $f$ velja

$$f'(x) = \dot{\beta}(\alpha^{-1}(x))(\alpha^{-1})'(x) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}.$$

□

Posledica 2.9. *Naj bosta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ dvakrat odvedljivi na $(t_0, t_1)$ in naj velja $\dot{x}(t) \neq 0$ za vse $t \in (t_0, t_1)$. Potem je pripadajoča funkcija $f$ iz zgornje trditve dvakrat odvedljiva in velja*

$$f''(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}.$$

Dokaz. Če formulo za prvi odvod funkcije $f$

$$f'(x(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

še enkrat odvajamo po $t$, dobimo

$$f''(x(t))\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^2},$$

kar po preureditvi da iskano formulo. □

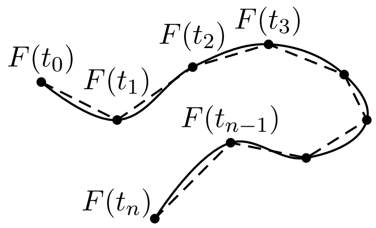
Polarno podano krivuljo $r = r(\varphi)$ gledamo kot parametrično podano krivuljo s parametrom $\varphi$:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Na osnovi tega lahko izpeljemo izraze za prvi in drugi odvod funkcije, ki jo določa krivulja.

## 3. Dolžina loka krivulje

Definicija 2.10. *Naj bo dana pot $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, ki določa krivuljo $K$. Izberimo delitev $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ intervala $[a,b]$. Pot $F(t)$ na $i$-tem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$. Dolžina lomljene črte, ki aproksimira krivuljo $K$, je*




$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2}.$$

*Če obstaja limita dolžin $\ell(D)$, ko gre velikost delitve $\delta(D)$ proti nič (neodvisno od izbire delitev), jo imenujemo* dolžina krivulje $K$ *in označimo $\ell(K)$:*

$$\ell(K) = \lim_{D,\delta(D)\to 0} \ell(D).$$

Trditev 2.11. *Naj bo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (x(t), y(t))$ zvezno odvedljiva (to pomeni, da sta komponenti $x(t)$ in $y(t)$ zvezno odvedljivi funkciji spremenljivke $t$). Potem je dolžina $\ell(F)$ poti $F$ enaka*

$$\ell(F) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Dokaz. Vsoto v $\ell(D)$ želimo prepoznati kot Riemannovo vsoto, zato moramo izpod korena "izpostaviti" velikost podintervala $\delta_i = t_i - t_{i-1}$. To lahko naredimo po Lagrangeevem izreku, ker sta $t \mapsto x(t)$ in $t \mapsto y(t)$ odvedljivi funkciji:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(s_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{za neki } s_i \in (t_{i-1}, t_i),$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(v_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{za neki } v_i \in (t_{i-1}, t_i).$$

Zgornje upoštevamo v $\ell(D)$ in dobimo

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{x}(s_i)^2 + \dot{y}(v_i)^2}\,\delta_i.$$

To sicer ni Riemannova vsota, vendar njena limita, ko gre velikost delitev proti 0, obstaja z istim argumentom kot v dokazu integrabilnosti zveznih funkcij, ker sta $\dot{x}$ in $\dot{y}$ zvezni. $\square$

PRIMER 2.12. *Naj bo $a > 0$. Izračunaj dolžino poti $F(t) = (t^2, t^3)$ za $t \in [0, a]$.*

OPOMBA 2.13. (1) *Dolžina tangentnega vektorja $\dot{F}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ na pot $F$ je $|\dot{F}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$, torej je $\ell(F) = \int_a^b |\dot{F}(t)|\, dt$.*
(2) *Iz zgornje formule za dolžino poti se zdi, da je ta odvisna od parametrizacije $F$. Na osnovi definicije pa pričakujemo, da je odvisna le od krivulje $K$, ki je tir poti. To je res, če je parametrizacija injektivna, torej vsako točko na krivulji obišče natanko enkrat; če pa parametrizacija večkrat opiše kak del krivulje, tega v dolžini upoštevamo večkrat.*

TRDITEV 2.14. *Naj bo $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva parametrizacija krivulje $K$ in $g\colon [c, d] \to [a, b]$ zvezno odvedljiva funkcija, ki je monotono naraščajoča in velja $g(c) = a$ ter $g(d) = b$. Potem je $G := F \circ g\colon [c, d] \to \mathbb{R}^2$ tudi parametrizacija za $K$ in velja $\ell(G) = \ell(F)$. Dolžino krivulje $K$ torej izračunamo kot dolžino njene poljubne injektivne parametrizacije.*

DOKAZ. Označimo $G(s) = F(g(s)) = (x(g(s)), y(g(s)))$. Tedaj je

$$\dot{G}(s) = (\dot{x}(g(s))\dot{g}(s), \dot{y}(g(s))\dot{g}(s)) = \dot{g}(s)\,(\dot{x}(g(s)), \dot{y}(g(s)))$$

in zato

$$|\dot{G}(s)| = |\dot{F}(g(s))|\,\dot{g}(s),$$

saj je $g$ naraščajoča. Sledi

$$\begin{aligned}
\ell(G) &= \int_c^d |\dot{G}(s)|\, ds \\
&= \int_c^d |\dot{F}(g(s))|\, \dot{g}(s)\, ds \\
&= \int_a^b |\dot{F}(t)|\, dt = \ell(F),
\end{aligned}$$

kjer smo pri prehodu iz druge v tretjo vrstico vpeljali novo spremenljivko $t = g(s)$. $\square$

POSLEDICA 2.15. (i) *Dolžina eksplicitno podane zvezno odvedljive krivulje $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ je*

$$\ell(K_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

(ii) *Dolžina polarno podane zvezno odvedljive krivulje $r = r(\varphi)$ za $\varphi \in [a, b]$ je*

$$\ell(K_r) = \int_a^b \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

DOKAZ. Eksplicitno podana krivulja $y = f(x)$ ima parametrizacijo $F(x) = (x, f(x))$, od koder takoj sledi prva formula. Parametrizacija polarno podane krivulje $r = r(\varphi)$ je $F(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$, tangentni vektor je

$$\dot{F}(\varphi) = (\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi),$$

kvadrat njegove dolžine pa je

$$\begin{aligned}
|\dot{F}(\varphi)|^2 &= \dot{r}(\varphi)^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + r(\varphi)^2\sin^2\varphi \\
&\quad + \dot{r}(\varphi)^2\sin^2\varphi + 2\dot{r}(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + r(\varphi)^2\cos^2\varphi \\
&= \dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Definicija 2.16. *Diferencial dolžine loka krivulje označimo z* $ds$ *in ga imenujemo tudi* ločna dolžina. *V vseh opisih krivulje velja*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

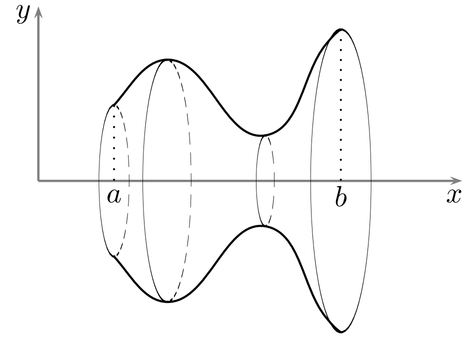
Primer 2.17. *Izračunaj dolžino implicitno podane krivulje* $(x^2+y^2)^2 = y^2 + 2x(x^2+y^2)$.

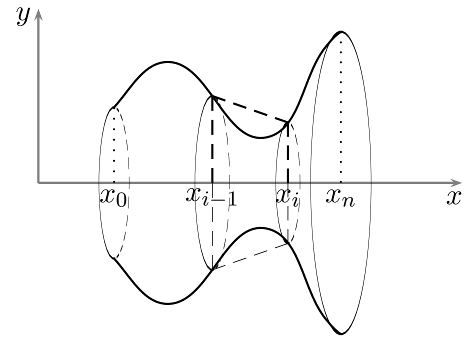
Uporaba 2.18 (Površina rotacijske ploskve). *Naj bo* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *nenegativna zvezna funkcija. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije* $f$ *nad intervalom* $[a,b]$ *okoli osi* $x$, *imenujemo* rotacijska ploskev. *Izberimo neko delitev* $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ *intervala* $[a,b]$. *Nad intervalom* $[x_{i-1}, x_i]$ *graf funkcije* $f$ *aproksimiramo z daljico od točke* $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ *do točke* $(x_i, f(x_i))$. *Ko daljico zavrtimo okoli* $x$*-osi, dobimo plašč prisekanega stožca s polmeroma leve in desne mejne krožnice* $f(x_{i-1})$ *in* $f(x_i)$ *ter višino* $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. *To da približek za površino ploskve:*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{\delta_i^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

*Če je* $f$ *zvezno odvedljiva, dobimo za površino v limiti, ko pošljemo velikost delitve* $\delta(D)$ *proti 0, formulo*

$$V = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$



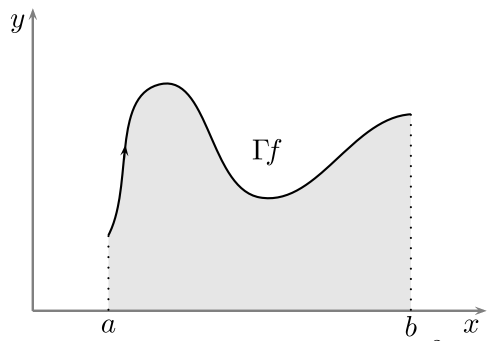

## 4. Ploščina območja, določenega s krivuljo

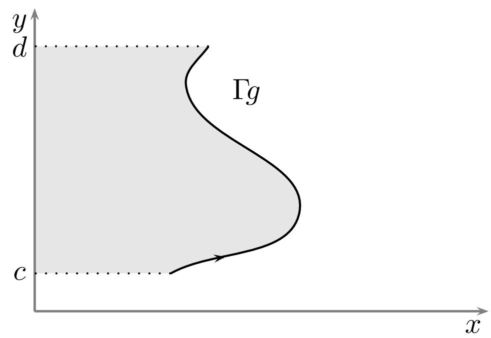
Trditev 2.19. (1) *Naj bo* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezna in nenegativna. Ploščina območja, ki ga določa graf funkcije* $y = f(x)$ *nad intervalom* $[a,b]$ *na osi* $x$, *je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

(2) *Naj bo* $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *zvezna in nenegativna. Ploščina območja, ki ga določa graf funkcije* $x = g(y)$ *nad intervalom* $[c,d]$ *na osi* $y$, *je*

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d x\,dy.$$



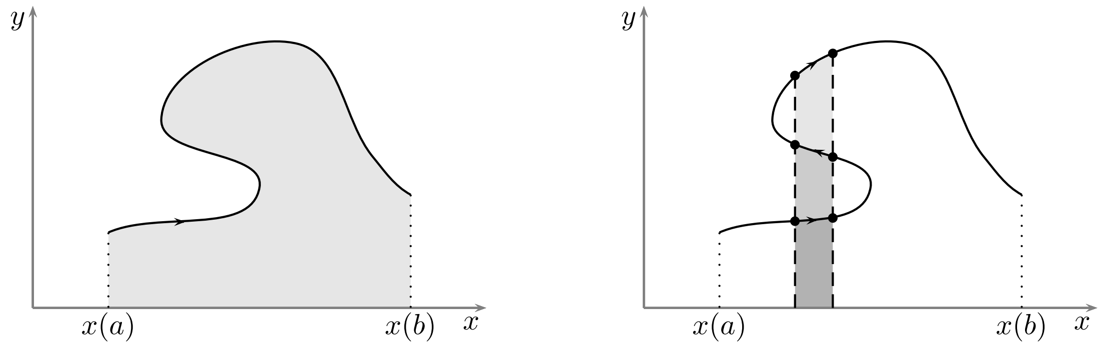




Trditev 2.20. *Naj bo* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva pot,* $F(t) = (x(t), y(t))$.
(1) *Če je* $y(t) \geq 0$ *za vse* $t$ *in je* $x(a) = \min x(t)$ *ter* $x(b) = \max x(t)$, *potem je ploščina med krivuljo in osjo* $x$ *nad intervalom* $[x(a), x(b)]$ *enaka*

$$\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

(2) *Če je* $x(t) \geq 0$ *za vse* $t$ *in je* $y(a) = \min y(t)$ *ter* $y(b) = \max y(t)$*, potem je ploščina med krivuljo in osjo* $y$ *nad intervalom* $[y(a), y(b)]$ *enaka*

$$\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt.$$

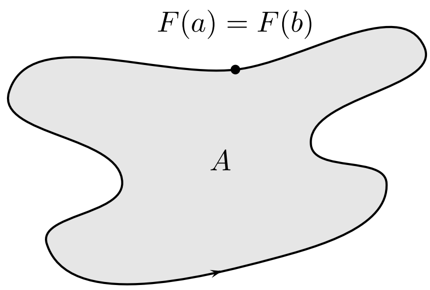



Dokaz. Naj bo $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ poljubna delitev intervala $[a, b]$ ter $S_D = (s_1, \ldots, s_n)$ usklajen nabor testnih točk. Del krivulje med točkama $F(t_{i-1})$ in $F(t_i)$ prispeva k ploščini približno $y(s_i)(x(t_i) - x(t_{i-1}))$; predznak tega prispevka je določen s predznakom razlike $x$ koordinat. Za približek ploščine tako dobimo

$$p(D, S_D) = \sum_{i=1}^{n} y(s_i)(x(t_i) - x(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} y(s_i)\dot{x}(v_i)\delta_i,$$

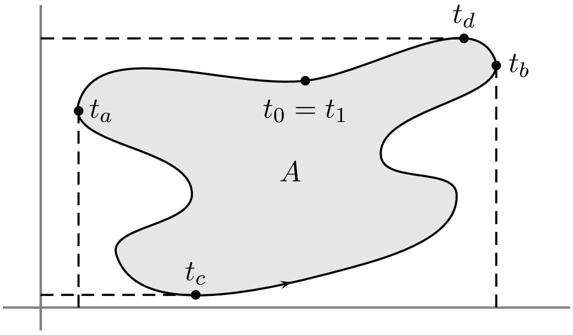
kjer smo uporabili Lagrangeev izrek (ki da točke $v_i \in (t_{i-1}, t_i)$) in kot običajno označili dolžino $i$-tega podintervala z $\delta_i$. Ponovno dobimo posplošeno Riemannovo vsoto, ki konvergira zaradi zveznosti $y$ in $\dot{x}$ proti $\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt$. □

Definicija 2.21. *Naj bo* $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *regularna parametrizacija krivulje* $K$*. Potem* $F$ *določa* usmerjenost $K$*, določeno s smerjo, v kateri potuje točka* $F(t)$ *po* $K$*, ko gre* $t$ *od* $a$ *do* $b$*.*
Gladka enostavna sklenjena krivulja *(ESK) je krivulja* $K$*, ki ima regularno parametrizacijo* $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$*, za katero velja* $F(a) = F(b)$ *in* $\dot{F}(a) = \dot{F}(b)$*,* $F|_{[a,b)}$ *pa je injektivna.*
*Naj bo* $A$ *območje, ki ga omejuje gladka enostavna sklenjena krivulja* $K$*. Regularna parametrizacija* $F$ *krivulje* $K$ *določa* pozitivno usmerjenost *krivulje* $K$*, če je* $A$ *na levi strani, ko se pomikamo vzdolž* $K$ *v smeri usmerjenosti, ki jo določa* $F$*.*




Trditev 2.22. *Naj bo* $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$*,* $F(t) = (x(t), y(t))$ *regularna parametrizacija ESK krivulje* $K$*, ki določa pozitivno usmerjenost* $K$*. Potem je ploščina območja* $A$ *znotraj* $K$ *enaka*

$$\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big)\,dt.$$



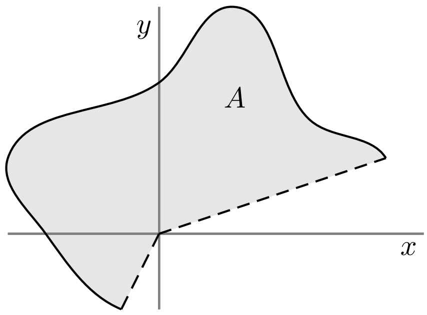

Dokaz. Označimo s $t_a$ ($t_b$) vrednost parametra $t$, pri kateri je vrednost koordinate $x$ na krivulji najmanjša (največja). Točki $F(t_a)$ in $F(t_b)$ razdelita krivuljo na dva loka. Zaradi izbire usmerjenosti krivulje je del integrala $\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt$ po spodnjem loku pozitiven, po zgornjem pa negativen, zato izračuna negativno vrednost ploščine območja znotraj krivulje. Podobno vidimo, da $\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt$ izračuna ploščino območja znotraj krivulje. Tretji integral je povprečje prvih dveh. □

Trditev 2.23. *Naj bo $r = r(\varphi)$ za $\varphi \in [\alpha, \beta]$ zvezna polarno podana krivulja. Potem je ploščina območja, ki ga določa krivulja skupaj z daljicama*

$$\varphi = \alpha,\ 0 \leq r \leq r(\alpha) \text{ in } \varphi = \beta,\ 0 \leq r \leq r(\beta),$$

*enaka*

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2\,d\varphi.$$




Dokaz. Pri parametrizaciji krivulje s polarnim kotom $F(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$ je

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r(\varphi)^2,$$

zato je diferencial ploščine enak

$$dp = \frac{1}{2}r(\varphi)^2\,d\varphi.$$

Da pripadajoči integral res izračuna ploščino izseka, lahko vidimo tudi preko Riemannovih vsot: za delitev $D = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta\}$ in testne točke $s_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ na $i$-tem podintervalu funkcijo $\varphi \to r(\varphi)$ zamenjamo s konstanto $r(s_i)$. Tako del območja nadomestimo s krožnim izsekom s središčnim kotom $\delta_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ in polmerom $r(s_i)$. Približek za ploščino območja je torej

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r(s_i)^2\delta_i,$$

ta pa pri $\delta(D) \to 0$ zaradi zveznosti $r$ konvergira k zgornjemu integralu. □

## 5. Krivinska krožnica in ukrivljenost krivulje

Definicija 2.24. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^2$ krivulja, ki ima tangento v vsaki točki blizu $(a, b) \in K$.* Krivinska krožnica *na $K$ v točki $(a, b)$ je limitna lega krožnic, ki so tangentne na $K$ v $(a, b)$ ter $(x, y) \in K$, ko gre $(x, y) \to (a, b)$, če ta limita obstaja. Polmer krivinske krožnice imenujemo* krivinski polmer, *njegovo obratno vrednost pa imenujemo* ukrivljenost *krivulje v točki $(a, b)$.*

Trditev 2.25. (1) *Naj bo $f$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Ukrivljenost grafa $f$ v točki $x$ je*

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}\,.$$

(2) *Naj bo $F$ dvakrat zvezno odvedljiva pot. Ukrivljenost tira poti $F$ v točki $t$ je*

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}\,.$$

(3) *Naj bo $r$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, ki določa polarno podano krivuljo. Ukrivljenost krivulje v točki $\varphi$ je*

$$\kappa(\varphi) = \frac{r(\varphi)^2 + 2\dot{r}(\varphi)^2 - r(\varphi)\ddot{r}(\varphi)}{(r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2)^{3/2}}\,.$$

Dokaz. (1) Središče $(u, v)$ krožnice, ki je tangentna na graf $f$ v točkah $(a, f(a))$ ter $(a + h, f(a+h))$, je presečišče normal v teh dveh točkah, zato zadošča:

$$\begin{aligned} v - f(a) &= -\frac{1}{f'(a)}(u-a) \\ v - f(a+h) &= -\frac{1}{f'(a+h)}(u-a-h). \end{aligned}$$

Enačbi odštejemo in delimo s $h$, da dobimo:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -(u-a)\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\cdot\frac{1}{f'(a)f'(a+h)} - \frac{1}{f'(a+h)}.$$

V limiti, ko pošljemo $h$ proti 0, zgornji izraz postane

$$f'(a) = -(u-a)\frac{f''(a)}{(f'(a))^2} - \frac{1}{f'(a)},$$

od koder izračunamo (če je $f''(a) \neq 0$)

$$\begin{aligned} u - a &= -\frac{f'(a)(1+(f'(a))^2)}{f''(a)} \\ v - f(a) &= \frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)}. \end{aligned}$$

Polmer krivinske krožnice je

$$R = \frac{(1+(f'(a))^2)^{3/2}}{|f''(a)|},$$

za ukrivljenost krivulje v $(a, f(a))$ pa vzamemo

$$\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1+(f'(a))^2)^{3/2}};$$

pri tem smo predznak izbrali tako, da je ukrivljenost pozitivna, ko krivinska krožnica leži nad grafom, oziroma negativna, ko krožnica leži pod grafom.

(2) Formule v parametričnem primeru dobimo z upoštevanjem $f' = \dot{y}/\dot{x}$ in $y'' = (\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x})/\dot{x}^3$. Če je $\dot{x} > 0$, formula za ukrivljenost sledi, sicer pa se razlikuje od tiste v (1) za predznak.

(3) Formulo v polarnem opisu dobimo iz parametričnega opisa z upoštevanjem polarne parametrizacije. □

## 6. Diferencialne enačbe v obliki diferenciala

Definicija 2.26. DE v obliki diferenciala *je enačba oblike*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

*kjer sta $P, Q$ definirani na nekem območju $A \subset \mathbb{R}^2$.*

*Naj bosta $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$ odvedljivi. DE $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ je* eksaktna na A*, če velja*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

*za vsak* $(x, y) \in A$.

PRIMER 2.27. (1) *Ugotovi, ali je enačba* $x^2\,dx + 2xy\,dy = 0$ *eksaktna.*
(2) *Pokaži, da je enačba* $(x + y^2)\,dx + (2xy + 1)\,dy = 0$ *eksaktna in poišči njeno splošno rešitev.*

TRDITEV 2.28. *Naj bo* $A \subset R^2$ *pravokotnik in* $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi funkciji. Če je enačba* $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ *eksaktna na* $A$*, potem ima splošno rešitev oblike* $g(x, y) = C$*, kjer je* $g\colon A \to \mathbb{R}$ *dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, ki zadošča*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \textit{in} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

DEFINICIJA 2.29. *Naj bo* $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ *pravokotnik in naj bo* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva funkcija. Funkcijo* $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$*, definirano s predpisom*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy,$$

*imenujemo* integral s parametrom.

LEMA 2.30. *Pri oznakah kot v definiciji je integral s parametrom* $x \mapsto F(x)$ *zvezno odvedljiva funkcija na* $[a, b]$ *in velja*

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy.$$

DOKAZ. Izračunajmo odvod $F$ po definiciji:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left( \int_c^d f(x+h, y)\,dy - \int_c^d f(x, y)\,dy \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \int_c^d \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\,dy \\
&= \int_c^d \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\,dy \\
&= \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy.
\end{aligned}$$

Pri prehodu iz tretje v četrto vrstico smo si izposodili rezultat (iz Analize 3), da smemo integral in limito zamenjati. □

DOKAZ TRDITVE 2.28. Funkcijo $g$ definiramo glede na izbrano točko $(a, b) \in A$ s predpisom

$$g(x, y) := \int_a^x P(t, b)\,dt + \int_b^y Q(x, s)\,ds.$$

Oba integrala sta po osnovnem izreku analize odvedljivi funkciji zgornje meje, drugi integral pa je po zgornji lemi tudi odvedljiva funkcija parametra $x$, torej je $g$ vsaj parcialno odvedljiva. Parcialna odvoda sta enaka

$$\begin{aligned}
g_y(x, y) &= Q(x, y) \\
g_x(x, y) &= P(x, b) + \int_b^y Q_x(x, s)\,ds \\
&= P(x, b) + \int_b^y P_y(x, s)\,ds \\
&= P(x, b) + (P(x, y) - P(x, b)) = P(x, y).
\end{aligned}$$

Ker sta parcialna odvoda $g_x$ in $g_y$ zvezno odvedljivi funkciji, je $g$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. □

Definicija 2.31. *Naj bo dana DE* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$*, kjer sta* $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljivi funkciji. Če je* $\mu\colon A \to \mathbb{R}$ *takšna zvezno odvedljiva funkcija, da je enačba*

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

*eksaktna, potem funkcijo* $\mu$ *imenujemo* integrirajoči množitelj *dane enačbe.*

Trditev 2.32. *Če je* $\mu$ *integrirajoči množitelj DE* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$*, potem* $\mu$ *zadošča*

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y).$$

*Dana enačba ima integrirajoči množitelj, ki je odvisen le od spremenljivke* $x$*, če je izraz* $\dfrac{Q_x - P_y}{Q}$ *odvisen le od spremenljivke* $x$ *(ne pa od* $y$*); v tem primeru je* $\mu = \mu(x)$ *rešitev enačbe*

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

*Dana enačba ima integrirajoči množitelj, ki je odvisen le od spremenljivke* $y$*, če je izraz* $\dfrac{Q_x - P_y}{P}$ *odvisen le od spremenljivke* $y$ *(ne pa od* $x$*); v tem primeru je* $\mu = \mu(y)$ *rešitev enačbe*

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{Q_x - P_y}{P}.$$

Dokaz. Pogoj eksaktnosti $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ da prvo enakost. Če predpostavimo, da je $\mu$ neodvisen od spremenljivke $y$, vidimo, da mora $\mu$ zadoščati zgoraj zapisani diferencialni enačbi. Ker je po predpostavki leva stran v tej enačbi neodvisna od $y$, mora enako veljati tudi za desno stran. Torej je zgornji pogoj potreben za obstoj takega integrirajočega množitelja. Je pa tudi zadosten, saj v tem primeru lahko v dobljeni enačbi ločimo spremenljivki in jo integriramo. □

Primer 2.33. *Reši enačbo* $(y^2 + 4xy)\,dx + (3xy + 4x^2 + 4y^2)\,dy = 0$ *tako, da poiščeš integrirajoči množitelj.*