POGLAVJE 3

Številske vrste

1. Osnovni pojmi

DEFINICIJA 3.1. Številska vrsta *je vsota (neskončnega) zaporedja realnih števil. Če je* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje realnih števil, je pripadajoča številska vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Za naravno število k je k-ta delna vsota *vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *enaka*

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* konvergentna (divergentna), *če je konvergentno (divergentno) zaporedje delnih vsot* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$. *Če je vrsta konvergentna, za njeno vsoto vzamemo limito delnih vsot.*

PRIMER 3.2. (1) *Naj bosta $a \neq 0$ in q realni števili.* Geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

je konvergentna natanko tedaj, ko je $|q| < 1$.

(2) Harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ *je divergentna.*

(3) *Ugotovi, ali je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *konvergentna.*

LEMA 3.3 (Potrebni pogoj za konvergenco vrste). *Če vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, potem je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DOKAZ. Naj bo $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ k-ta delna vsota vrste. Potem je $s_k = s_{k-1} + a_k$. Po predpostavki obstaja limita zaporedja delnih vsot $s = \lim_{k\to\infty} s_k$. Tedaj velja

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} s_{k-1} + \lim_{k\to\infty} a_k \implies s = s + \lim_{k\to\infty} a_k \implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

□

OPOMBA 3.4. *Prvih nekaj členov vrste ne vpliva na njeno konvergenco.*

2. Vrste s pozitivnimi členi

Trditev 3.5 (Primerjalni kriterij). *Naj za zaporedji števil* $(a_n)_n$ *in* $(b_n)_n$ *velja* $0 \le a_n \le b_n$ *za vse* $n \in \mathbb{N}$. *Potem velja:*

(1) *če* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, potem tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

(2) *če* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, potem tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergira.*

Rečemo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majoranta *za vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *ter da je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ minoranta *za vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz. Označimo $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ in $t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$. Iz predpostavke $a_n \le b_n$ za vsak n sledi $s_k \le t_k$ za vsak k. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, je zaporedje njenih delnih vsot $(t_k)_k$ omejeno, zato je tudi $(s_k)_k$ navzgor omejeno. Ker je to zaporedje naraščajoče, je torej konvergentno in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna.

Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, je zaporedje $(s_k)_k$ navzgor neomejeno, zato je tudi $(t_k)_k$ neomejeno, torej je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna. □

Primer 3.6. *Ugotovi, ali vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konvergira.*

Trditev 3.7 (Kvocientni ali d'Alembertov kriterij). *Naj bo* $(a_n)_n$ *zaporedje pozitivnih števil, za katerega obstaja*

$$d := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Če je $d < 1$, *potem vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

Če je $d > 1$, *potem vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Če je $d = 1$, *o konvergenci vrste ne moremo reči ničesar.*

Dokaz. Če je $d < 1$, potem lahko izberemo neki $q \in (d, 1)$. Za ta q obstaja tak n_0, da velja

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$$

za vsak $n \ge n_0$. Ker nas zanima le konvergenca vrste, smemo privzeti, da zgornja neenakost velja za vse n. Ker so členi pozitivni, lahko neenakost zapišemo kot $a_{n+1} \le q a_n$, od koder induktivno sledi $a_{n+1} \le q^n a_1$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ima za majoranto konvergentno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$, torej konvergira.

Če je $d > 1$, potem obstaja tak n_0, da velja

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{oziroma} \quad a_{n+1} \geq a_n$$

za vsak $n \geq n_0$. Od tod sledi, da členi vrste ne konvergirajo proti 0, torej vrsta divergira.

Če je $d = 1$, lahko vrsta divergira ali konvergira, kot pokažeta vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. □

PRIMER 3.8. *Za katere $a > 0$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$?*

TRDITEV 3.9 (Korenski ali Cauchyjev kriterij). *Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje nenegativnih števil, za katerega obstaja*

$$c := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Če je $c < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
Če je $c > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
Če je $c = 1$, o konvergenci vrste ne moremo reči ničesar.

PRIMER 3.10. *Za katere $a > -1$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2}$?*

TRDITEV 3.11 (Integralski kriterij). *Naj bo $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ zvezna, pozitivna in padajoča funkcija. Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira posplošeni integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.*

DOKAZ. Za vsako naravno število k velja

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(k) \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(k-1).$$

Če je $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergenten, je torej zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ navzgor omejeno, zato je vrsta konvergentna.

Če je $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ divergenten, je torej zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ navzgor neomejeno, zato je vrsta divergentna.

Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergentna, je zaporedje njenih delnih vsot omejeno, zato je omejeno tudi zaporedje števil $\int_1^k f(x)\,dx$. Ker je funkcija $t \mapsto \int_1^t f(x)\,dx$ naraščajoča, je torej omejena, zato je $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergenten.

Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergentna, je zaporedje njenih delnih vsot neomejeno, zato je neomejeno tudi zaporedje števil $\int_1^k f(x)\,dx$ in $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ je divergenten. □

Posledica 3.12. *Naj bo $p > 0$ realno število. Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *konvergira za $p > 1$ in divegira za $p \leq 1$.*

Trditev 3.13 (Raabejev kriterij). *Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje pozitivnih števil, za katerega obstaja*

$$r := \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Če je $r > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
Če je $r < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*
Če je $r = 1$, o konvergenci vrste ne moremo reči ničesar.

Dokaz. Če je $r > 1$, lahko izberemo $q \in (1, r)$. Za ta q obstaja tak n_0, da velja $r_n \geq q$ za vsak $n \geq n_0$. Ta pogoj lahko preoblikujemo takole:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \frac{q}{n} \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{q}{n}.$$

Izberimo neki $p \in (1, q)$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 1/n)^p - 1}{1/n} = p < q,$$

obstaja tak n_1, da velja

$$1 + \frac{q}{n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

za vsak $n \geq n_1$. Sledi, da za vse $n \geq n_0, n_1$ velja

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^p.$$

Ker smemo privzeti, da slednje velja za vse n, induktivno dobimo

$$a_{n+1} \leq \frac{a_1}{(n+1)^p}.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ima torej konvergentno majoranto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{n^p}$ in je zato konvergentna.

Če je $r < 1$, potem obstaja tak n_0, da velja $r_n \leq 1$ za vsak $n \geq n_0$. Ta pogoj je ekvivalenten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} \implies a_{n+1} \geq \frac{a_1}{n+1}.$$

Torej ima vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentno minoranto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{n}$. □

3. Alternirajoče vrste

Definicija 3.14. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* alternirajoča, *če je člen a_{n+1} nasprotno predznačen kot člen a_n za vse $n \in \mathbb{N}$.*

Primer 3.15. *Ugotovi, ali je* alternirajoča harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *konvergentna.*

Trditev 3.16 (Leibnizov kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *alternirajoča vrsta. Če zaporedje* $(|a_n|)_n$ monotono *pada proti 0, potem je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna. Če v tem primeru* s_k *označuje* k*-to delno vsoto vrste in* s *vsoto vrste, potem velja* $|s - s_k| \leq |a_{k+1}|$.

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je $a_1 > 0$; označimo $b_n := |a_n|$. Potem je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n.$$

Za podzaporedji sodih in lihih delnih vsot velja:

$$\begin{aligned}
s_{2k} &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2k-3} - b_{2k-2}) + (b_{2k-1} - b_{2k}) \\
&= s_{2k-2} + (b_{2k-1} - b_{2k}) \geq s_{2k-2} \\
s_{2k+1} &= b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - (b_{2k-2} - b_{2k-1}) - (b_{2k} - b_{2k+1}) \\
&= s_{2k-1} - (b_{2k} - b_{2k+1}) \leq s_{2k-1} \\
s_{2k+1} &= s_{2k} + b_{2k+1} \geq s_{2k}.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je $(s_{2k})_k$ naraščajoče, $(s_{2k+1})_k$ padajoče in za vsak k velja

$$s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k+1} \leq s_1.$$

Obe podzaporedji sta torej konvergentni, iz predpostavke $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ pa sledi še, da sta njuni limiti enaki.

Ocenimo še razliko med delno vsoto in vsoto vrste:

$$\begin{aligned}
0 \leq s - s_{2k} &= b_{2k+1} - (b_{2k+2} - b_{2k+3}) - \cdots \leq b_{2k+1} \\
0 \leq s_{2k+1} - s &= b_{2k+2} - (b_{2k+3} - b_{2k+4}) - \cdots \leq b_{2k+2}.
\end{aligned}$$

□

4. Absolutna konvergenca

Definicija 3.17. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* absolutno konvergentna, *če je konvergentna vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *iz absolutnih vrednosti členov vrste.*

Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna, ni pa absolutno konvergentna, rečemo, da je* pogojno konvergentna.

Primer 3.18. *Alternirajoča harmonična vrsta je pogojno konvergentna.*

Trditev 3.19. *Če je vrsta absolutno konvergentna, potem je tudi konvergentna.*

Dokaz. Označimo $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ in $t_k = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$. Po predpostavki je $(t_k)_k$ konvergentno, zato je omejeno, torej obstaja tak $M > 0$, da velja $t_k \leq M$ za vsak k. Ker je

$$|s_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |a_n| = t_k \leq M,$$

je tudi $(s_k)_k$ omejeno, zato ima vsaj eno stekališče s. Če $(s_k)_k$ ni konvergentno, ima torej še eno stekališče $s' \neq s$. Označimo $d := |s' - s| > 0$ in izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Za ta ε obstaja tak k_0, da velja $|t - t_k| < \varepsilon$ za vsak $k \geq k_0$, kjer smo označili $t = \lim_{k\to\infty} t_k$. Torej velja

$$|t - t_k| = t - t_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Ker sta s in s' stekališči zaporedja $(s_k)_k$, obstajata $k, k' \geq k_0$, za katera velja:

$$|s - s_k| < \varepsilon \ \text{ in } \ |s' - s_{k'}| < \varepsilon.$$

Od tod sledi

$$d = |s - s'| = |s - s_k + s_k - s_{k'} + s_{k'} - s'| \leq |s - s_k| + |s_k - s_{k'}| + |s_{k'} - s'| < 3\varepsilon.$$

Ker lahko $\varepsilon > 0$ izberemo poljubno, za $\varepsilon = d/3$ (in za vsako manjšo pozitivno vrednost) dobimo protislovje. Sledi, da je $(s_k)_k$ konvergentno. $\square$

Trditev 3.20 (Konvergentne vrste tvorijo vektorski prostor). *Naj bosta vrsti* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *(absolutno) konvergentni in naj bo* $c \in \mathbb{R}$. *Potem so (absolutno) konvergentne tudi vrste* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ *ter velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Trditev 3.21. *Naj bo vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergentna in* $(b_n)_n$ *omejeno zaporedje števil. Potem je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *tudi absolutno konvergentna. (Analogna trditev za konvergentne vrste ne velja.)*

Primer 3.22. *Za vsak* $a \in \mathbb{R}$ *je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$ *absolutno konvergentna.*

Izrek 3.23 (Zamenjava vrstnega reda členov). (1) *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergenta vrsta. Potem je za poljubno bijektivno funkcijo* $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *absolutno konvergenta in ima isto vsoto kot začetna vrsta.*
(2) *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna. Potem za vsak* $s \in [-\infty, \infty]$ *obstaja bijektivna funkcija* $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *za katero je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

Dokaz. (1) Označimo s s vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in s s_k njeno k-to delno vsoto. Ker je vrsta po predpostavki absolutno konvergentna, je zaporedje delnih vsot $t_k = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$ konvergentno;

limito tega zaporedja označimo s t. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja tak k_0, da za vsak $k \geq k_0$ velja

$$|s - s_k| < \varepsilon \ \text{ in } \ |t - t_k| < \varepsilon.$$

Zadnja neenakost pomeni $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$.

Označimo z u_ℓ še ℓ-to delno vsoto preurejene vrste $\displaystyle\sum_{n=1}^{\ell} a_{\sigma(n)}$. Ker v zaporedju $(\sigma(n))_n$ nastopi vsako naravno število natanko enkrat, obstaja tak ℓ_0, da $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(\ell_0)$ vsebuje vsa števila $1, 2, \ldots, k_0$. Potem za $\ell \geq \ell_0$ velja

$$|s - u_\ell| = |s - s_{k_0} + s_{k_0} - u_\ell| \leq |s - s_{k_0}| + |s_{k_0} - u_\ell| < 2\varepsilon.$$

(2) (Ideja dokaza.) Po predpostavki je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, zato ima neskončno pozitivnih in neskončno negativnih členov. Naj bo $b_n := \max\{a_n, 0\}$ in $c_n := \max\{-a_n, 0\}$. Očitno velja $a_n = b_n - c_n$. Vrsti $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ in $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sta torej divergentni.

Obravnavajmo le primer, ko je s končno pozitivno število. Preureditev dane vrste dobimo tako, da najprej vzamemo toliko členov b_n, $n = 1, 2, \ldots, k$, da delna vsota $B_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} b_n$ preseže s, prejšnja pa še ni večja od s. Nato vzamemo najmanjše možno število členov c_n, da za delno vsoto $C_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\ell} c_n$ velja $B_1 - C_1 < S$. Postopek induktivno ponavljamo. $\square$

Primer 3.24. *Alternirajočo harmonično vrsto lahko preuredimo tako, da je njena vsota enaka polovici začetne vsote:*

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots.$$