

## DOLOČENI INTEGRAL

1. Po definiciji izračunaj naslednji integral

$$\int_0^1 e^x dx.$$

2. Izračunaj naslednje določene integrale.

(a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

(b)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$

(c)  $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

(d)  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx$

(e)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

(f)  $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2 \cos x}$ .

3. Dokaži

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}.$$

4.  $\int_0^{\sqrt{a}} x \sqrt{a^2 - x^4} dx$  ( $a > 0$ ).

5. Naj bo  $a > 0$ . Dokaži, da je določeni integral  $\int_{-a}^a f(x) dx$  enak

(a)  $2 \int_0^a f(x) dx$ , če je  $f$  soda funkcija;

(b) 0, če je  $f$  liha funkcija.

6. Naj bo  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  taka zvezna funkcija, da velja  $f(x) = f(\pi - x)$  za vsak  $x \in [0, \pi]$ . Dokaži, da velja

$$\int_0^\pi x f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$$

in izračunaj

$$\int_0^\pi \frac{x dx}{1 + 2 \sin x}.$$

7. Dokaži

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

8. Pokaži, da je

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

ter izpelji zvezo  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ . Za naravno število  $n$  izračunaj  $I_n$ . Koliko je  $I_9$ ?

9. S pomočjo določenega integrala izračunaj naslednje limite.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{n+1}{n^3}} + \sqrt{\frac{n+2}{n^3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+n}{n^3}} \right)$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (\ln(n+k) - \ln(n)).$

10. Izračunaj integral

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx.$$

11. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij  $y = \frac{x^2}{2}$  in  $y = \frac{1}{x^2+1}$ .

12. Parabola  $y = x^2$  razdeli elipso  $\frac{2x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$  na dva dela. Izračunaj njhovo ploščino.

13. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta paraboli  $y^2 = 2px$  in  $x^2 = 2py$ .

14. Izračunaj ploščino, ki ga omejuje elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

15. Naj funkcija  $y$  zadošča  $y^n = x$ . Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje funkcija  $y$  in abscisna os na intervalu  $[0, 3]$  na dva načina.

16. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije  $f(x) = x + \sin x$  zarotiramo okoli osi  $x$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

17. Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, če graf funkcije  $f(x) = 2x - x^2$  na intervalu  $[0, 2]$  zavrtimo okoli osi  $y$ .

18. Izračunaj

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sin e^{x^2}} \sin \frac{\sqrt{t}}{e^t} dt.$$

19. Izračunaj

$$\frac{d}{dx} \int_{\arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}^{e^{x \cos(x^3)}} \frac{\ln(t^2 + 1)}{e^t + t} dt.$$