

DOLOČENI INTEGRAL

1. S pomočjo Riemannovih vsot izračunaj naslednje Riemannove integrale.

(a) $\int_0^1 a^x dx$ ($a > 0$),

(b) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$),

(c) $\int_a^b \frac{dx}{x}$, ($0 < a < b$).

Lahko si pomagaš z ustreznimi Riemannovi vsotami iz datoteke z rezultati.

2. Izračunaj naslednje določene integrale.

(a) $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$

(b) $\int_1^e \ln x dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x} dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

(e) $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1} dz$

3. Dokaži

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

4. Pokaži, da je

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

ter izpelji zvezo $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Za naravno število n izračunaj I_n . Koliko je I_9 ?

5. S pomočjo določenega integrala izračunaj naslednji limiti.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n} \right)$.

6. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje graf funkcije $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ z abscisno osjo.

7. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $y = e^x$ in $y = e^{-x}$ ter premica $x = 1$.

8. Poišči volumen elipsoida, dobljenega z rotacijo elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ okoli osi x .

9. Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo z rotacijo verižnice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ na intervalu $[-a, a]$ okoli abscisne osi.

10. Izračunaj

$$\frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt.$$